

Universidade do Minho
Escola de Ciências

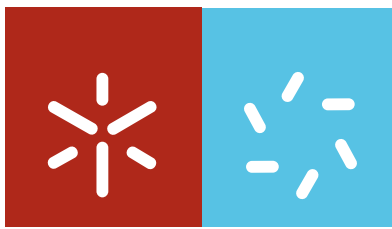
**Análise de Coerência de Feixes Laser com
Óptica Difractiva e Difusão Dinâmica**
Flávio Pedro Gonçalves Fernandes Ferreira

Flávio Pedro Gonçalves Fernandes Ferreira

**Análise de Coerência de Feixes Laser com
Óptica Difractiva e Difusão Dinâmica**

UMinho | 2008

2008



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Flávio Pedro Gonçalves Fernandes Ferreira

Análise de Coerência de Feixes Laser com Óptica Difractiva e Difusão Dinâmica

Tese de Doutoramento em Ciências
Área de Conhecimento de Física

Trabalho efectuado sob orientação do
Professor Doutor Michael Scott Belsley
e da
Professora Doutora Etelvina de Matos Gomes

Declaração:

De acordo com a legislação em vigor, não é permitida a reprodução de qualquer parte desta tese.

Agradecimentos

*Aos meus supervisores Michael Belsley e Etelvina de Matos Gomes
agradeço a confiança e a autonomia que me concederam*

*Ao José Carlos Gomes
agradeço o convite para uma palestra sobre este trabalho*

*Ao António José Pereira
agradeço a leitura crítica do texto da tese*

*Ao Paulo Felgueiras
agradeço a camaradagem e boa disposição*

*Aos meus familiares,
agradeço todo o apoio*

Resumo

Esta tese descreve várias experiências destinadas a caracterizar a coerência espacial e temporal de segunda ordem de fontes laser estatisticamente estacionárias. Propomos uma nova técnica holográfica para analisar um feixe laser como uma sobreposição de modos espacialmente coerentes, baseada na correlação das componentes do campo numa base arbitrária. Um modulador espacial de luz é utilizado para gerar pares de funções daquela base, com fases relativas variáveis, permitindo a medição da interferência das componentes do campo. A inversão da matriz de correlação resultante fornece os perfis transversos e a distribuição de potências dos modos espacialmente coerentes. Analisámos um feixe de He-Ne em termos de uma base de funções Hermite-Gauss desajustadas aos modos de cavidade esperados. Os modos coerentes determinados ajustaram-se bem aos modos de cavidade previstos, com o raio de feixe e as orientações nodais correctos, incluindo um modo híbrido associado a modos transversos degenerados em frequência, em acordo com a teoria de cavidades. Os perfis transversos de intensidade, tanto no campo próximo como no campo distante, são consistentes com a análise. O modulador espacial de luz consiste num painel de cristais líquidos do tipo *twisted-nematic*, cuja curva de modulação foi calibrada *in-situ*, através duma técnica inovadora baseada num interferómetro de *shearing*. Identificaram-se modos de operação quase-amplitude e quase-fase, em dois comprimentos de onda diferentes. Também propomos utilizar a difusão dinâmica de luz como uma ferramenta de análise de coerência. A amplitude dinâmica da função autocorrelação de intensidade difundida depende da coerência dentro do volume difusor. Medimos o módulo do grau de coerência temporal dum laser de iões de Árgon, cujo feixe foi dividido em dois feixes incidentes numa solução de partículas difusoras, com atraso óptico relativo variável. Os resultados estão em bom acordo quer com o modelo de coerência do laser quer com as medições obtidas com um interferómetro de Michelson. O método é ainda adequado para a medição do factor de coerência transversa global dum feixe laser.

Abstract

This dissertation describes a series of experiments designed to characterize both the spatial and temporal second order coherence of statistically stationary laser beams. We propose a new holographic technique to characterize an arbitrary laser beam as a superposition of spatially coherent modes, based on the correlation of field components in an arbitrary base. A spatial light modulator is used to produce pairs of base functions with variable relative phase allowing the interference of field components to be measured. The inversion of the resulting correlation matrix gives the coherent mode profiles and associated power distribution. We analyzed a He-Ne laser beam using a set of Hermite-Gaussian base functions mismatched to the anticipated cavity modes. The determined coherent modes were a good fit to the expected Hermite-Gaussian cavity modes, with the expected spot-size and orientation, including a hybrid associated with frequency degeneracy in accordance with cavity theory. Near and far-field transverse intensity profiles were consistent with the analysis. The spatial light modulator was a twisted nematic liquid crystal panel whose modulation curve was calibrated in-situ using a novel shearing interferometer. Mostly-amplitude and mostly-phase operation modes were identified for two distinct wavelengths. We also propose using dynamic light scattering as a tool for coherence analysis. The dynamic amplitude of the intensity autocorrelation function gives a measure of the coherence within the scattering volume. We measured the modulus of the degree of temporal coherence of an Argon ion laser by dividing it into two beams with variable relative delay before incidence in a particle suspension. Good agreement was found both with theory and the results obtained using the more conventional Michelson interferometer technique. The method is also suitable for measuring the global degree of spatial coherence of a laser beam.

Índice

Capítulo 1: Introdução	1
1.1 Coerência de feixes laser, 1	
1.2 Análise modal de feixes laser, 3	
1.3 Análise transversa com óptica difractiva, 5	
1.4 Análise de coerência com difusão dinâmica, 6	
1.5 Plano da tese, 10	
 Capítulo 2: Modos laser	 9
2.1 Introdução, 10	
2.2 Modos de propagação, 10	
2.2.1 Propagação paraxial, 10	
2.2.2 Modos Gaussianos, 13	
2.2.3 Transformação por lentes, 18	
2.3 Modos de cavidade, 20	
2.3.1 Cavidades de espelhos esféricos, 20	
2.3.2 Efeitos do meio activo, 23	
2.3.3 Ortogonalidade, 26	
2.4 Feixes multimodo, 30	
2.4.1 Modos degenerados, 30	
2.4.2 Frentes de onda, 31	
2.4.3 Perfil de irradiância, 32	
2.5 Conclusão, 37	
 Capítulo 3: Coerência de feixes laser	 39
3.1 Introdução, 40	
3.2 Coerência mútua dum feixe multimodo, 41	
3.2.1 Modelo do feixe, 41	
3.2.2 Coerência mútua, 44	
3.3 Coerência espacial numa base arbitrária, 48	
3.3.1 Matriz intensidade mútua, 49	

- 3.3.2 Interferência bimodal, 51
- 3.4 Inversão de coerência espacial, 52**
 - 3.4.1 Resolução da equação de Fredholm, 52
 - 3.4.2 Problema da fase e separabilidade de coordenadas, 54
- 3.5 Conclusão, 57**

Capítulo 4: Técnicas de análise de feixes laser 59

- 4.1 Introdução, 60**
- 4.2 Técnicas de análise espectral, 60**
 - 4.2.1 Comprimento de onda, 60
 - 4.2.2 Largura de banda, 61
 - 4.2.3 Espectro, 62
- 4.3 Técnicas de análise espacial, 63**
 - 4.3.1 Qualidade de feixe, 63
 - 4.3.2 Análise de frente de onda, 64
 - 4.3.3 Análise modal transversa, 66
- 4.4 Técnicas propostas, 71**
 - 4.4.1 Interferometria holográfica, 71
 - 4.4.2 Difusão dinâmica de luz, 73
- 4.5 Conclusão, 75**

Capítulo 5: Modulador espacial de luz TN-LCD 77

- 5.1 Introdução, 78**
- 5.2 Moduladores espaciais TN-LCD, 79**
 - 5.2.2 Propriedades de modulação, 79
 - 5.2.3 Características de difracção, 84
- 5.3 Caracterização dum modulador TN-LCD, 87**
 - 5.3.1 Especificações do modelo, 87
 - 5.3.2 Caracterização da matriz, 88
 - 5.3.3 Calibração da modulação, 91
 - 5.3.4 Qualidade óptica, 99
- 5.4 Hologramas modais com um TN-LCD, 101**
 - 5.4.1 Hologramas gerada por computador, 101

5.4.2 Geração de modos transversos, 106	
5.5 Conclusão, 109	111
Capítulo 6: Análise modal transversa holográfica	
6.1 Introdução, 112	
6.2 Correlação de campo holográfica, 114	
6.2.1 Projecção do campo numa base modal de medida, 114	
6.2.2 Interferência das componentes na base de medida, 118	
6.2.3 Matriz de correlação e reconstrução do campo, 120	
6.3 Simulações numéricas, 123	
6.3.1 Filtros “ajustados” desajustados, 123	
6.3.2 Representação do campo numa base incompleta, 126	
6.4 Análise modal transversa de um laser He-Ne, 129	
6.4.1 Montagem experimental, 129	
6.4.2 Feixe analisado e escolha da base de medida, 134	
6.4.3 Resultados, 137	
6.4.4 Discussão, 143	
6.5 Conclusão, 151	155
Capítulo 7: Análise de coerência com difusão dinâmica de luz	
7.1 Introdução, 156	
7.2 Difusão dinâmica de luz parcialmente coerente, 157	
7.2.1 Difusão dinâmica com detecção coerente, 157	
7.2.2 Difusão dinâmica multi-feixe, 159	
7.2.3 Amplitude dinâmica e coerência, 167	
7.3 Análise de coerência de um laser de Árgon, 172	
7.3.1 Montagem experimental, 172	
7.3.2 Medição da coerência temporal, 175	
7.3.3 Medição da coerência espacial global, 181	
7.4 Conclusão, 183	
Apêndice I : Aberrações ópticas	187
Apêndice II: Controle e aquisição de vídeo	193
Referências	195

Capítulo 1

Introdução

1.1 Coerência de feixes laser

A característica mais saliente de uma fonte laser típica é a sua elevada coerência, ou seja, a capacidade de produzir efeitos de interferência entre dois pontos do campo, separados espacial ou temporalmente. A elevada coerência temporal resulta da selecção de modos numa cavidade ressonante, cujas frequências de ressonância estão limitadas a uma largura espectral estreita da transição laser. Por sua vez a elevada direcionalidade do feixe imposta pela geometria da cavidade implica uma elevada coerência espacial. A amplificação de vários modos de oscilação, com diferentes frequências de ressonância e com diferentes perfis espaciais degrada a coerência do feixe emitido.

As propriedades de coerência de um feixe laser condicionam a sua aplicações. Uma elevada coerência espacial é exigida em aplicações que demandem elevada capacidade de focagem ou colimação do feixe, tais como cirurgia laser, pinças ópticas, acoplamento em fibras ópticas e teste de aberrações. Por outro lado, elevada coerência temporal é requerida em medidas interferométricas de deslocamento e espectroscopia de alta resolução. Nalgumas aplicações, por exemplo em tomografia óptica coerente, a coerência temporal deve ser relativamente baixa, enquanto outras, por exemplo sistemas de comunicação atmosféricos, beneficiam antes de baixa coerência espacial. A maioria das aplicações holográficas requer coerência espacio-temporal elevada enquanto que aplicações de iluminação não requerem coerência de todo.

É possível dividir o problema da análise de coerência em dois domínios: temporal e espacial. Enquanto a coerência espacial nos dá informação sobre a estrutura modal transversa dum feixe, a coerência temporal depende do espectro de frequências associadas a todos os modos longitudinal-transversos nele presentes.

Os paradigmas experimentais da análise de coerência temporal e espacial são os interferómetros de Michelson e de Young respectivamente. A quantidade medida é a

correlação do campo de segunda ordem (correlação cruzada), que se traduz em franjas de interferência entre dois pontos do campo separados longitudinalmente (fig. 1.1a) ou transversalmente (fig. 1.1b).

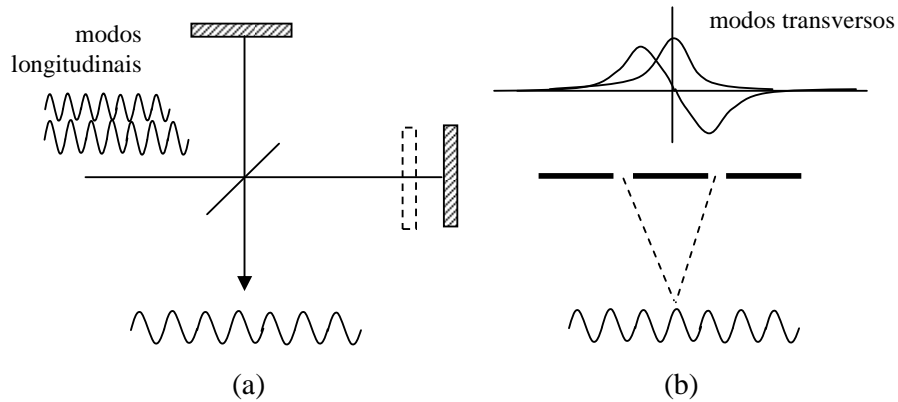


Fig. 1.1 Os dois paradigmas da análise de coerência: (a) temporal; (b) espacial. A análise das franjas de interferência (visibilidade e posição) permite decompor o feixe numa representação coerente equivalente: modos longitudinais em (a) e transversos em (b).

A decomposição espectral do campo consiste na representação do campo por uma expansão em modos coerentes, cuja correlação de segunda ordem é a mesma que o campo original. No domínio temporal, a decomposição espectral é uma aplicação do teorema de Wiener-Kintchine, segundo o qual a transformada de Fourier da autocorrelação do campo dá o espectro de potência da fonte. Já no domínio espacial, é possível decompor um campo aleatório numa soma de campos ortogonais (projecção espacial mútua nula) e descorrelacionados, o que pode ser visto como aplicação do teorema de Karhunen-Loève.

A decomposição espectral dum feixe não coincide necessariamente com a distribuição modal da fonte pois diferentes campos podem ter as mesmas propriedades de coerência de segunda ordem. Por exemplo, *mode-locking* entre modos longitudinais produz um feixe pulsado com a mesma autocorrelação dum laser contínuo. Por outro lado, lasers com cavidades instáveis não suportam modos espaciais ortogonais, apesar de em princípio ser possível obter uma representação ortogonal equivalente em termos de coerência espacial.

A análise de coerência de segunda ordem é, ainda assim, útil, se combinada com suposições adicionais, tais ortogonalidade entre modos espaciais e independência entre modos longitudinais. Além disso, seja qual for a natureza da fonte, o conhecimento da coerência de segunda ordem, ou da representação coerente equivalente, permite prever a sua propagação em meios lineares, tanto determinísticos (e.g. um sistema óptico convencional) como aleatórios (e.g. a atmosfera) (Mandel and Wolf 1995).

1.2 Análise modal de feixes laser

A maioria dos lasers suporta um único modo transversal (Gaussiano), de modo a ter elevada coerência espacial, e um ou vários modos longitudinais, consoante o grau de coerência temporal requerido. Mesmo assim, é importante dispor de técnicas de medição que permitam verificar a composição modal efectivamente presente. Uma motivação fundamental para dispor de técnicas de análise modal é a verificação de modelos físicos dum laser, uma vez que a distribuição modal do feixe dá informação sobre a interdependência complexa entre a geometria da cavidade, o ganho do meio activo, a bombagem do meio, e os elementos de selecção modal. Existe ainda um interesse crescente na utilização de feixes com modos transversais não Gaussianos em diversas aplicações, desde pinças ópticas a átomos frios. Quer estes feixes sejam gerados por um laser ou obtidos por transformação externa (conversores astigmáticos, elementos ópticos difractivos), a verificação das características modais deste feixes é importante.

Na análise longitudinal de feixes, técnicas interferométricas tais como a espectroscopia de Fourier (interferómetro de Michelson) ou a espectroscopia Fabry-Pérot de varrimento são ferramentas consensuais e comuns nos laboratórios. Já na análise transversal, apesar da variedade de técnicas propostas, “as propriedades modais de dispositivos laser têm sido mais frequentemente calculadas do que medidas” (Siegman 2000).

Os sensores de frente de onda (nomeadamente do tipo Shack-Hartman) são úteis para análise de perfis de fase-amplitude de feixes espacialmente coerentes (um só modo espacial), designadamente para análise de aberrações, mas não o são para a análise modal de feixes parcialmente coerentes.

Para feixes com múltiplos modos transversos, a técnica mais simples consiste no ajuste de funções modais ao perfil de irradiância transversa medido. Esta técnica tem o contudo o inconveniente de necessitar um conhecimento prévio dos perfis dos modos componentes. Além disso, é essencialmente ambígua, pois diferentes composições modais poderão ter o mesmo perfil de irradiância.

Dada a relativa dificuldade da análise modal espacial, que permitiria prever as características de propagação do feixe analisado, a técnica predominante para a análise de propagação de feixes laser é a medição do parâmetro de “qualidade de feixe” M^2 . Tal técnica baseia-se em medidas da evolução longitudinal do segundo momento do perfil de irradiância do feixe, sendo M^2 a razão entre a divergência do feixe no campo longínquo e a divergência dum feixe puramente Gaussiano ($M^2=1$) com o mesmo raio na cintura. O predomínio desta técnica deve-se tanto à sua simplicidade como à sua importância para aplicações onde a máxima focabilidade interessa. No entanto, o M^2 , por si só, não nos dá informação acerca da composição modal do feixe. Além disso, o valor de M^2 , numa dada direcção transversa, nem sempre é invariante com a propagação (por exemplo em feixes sem astigmatismo simples, ditos “torcidos”,).

Em princípio, a medida da coerência espacial num único plano transversal, permite decompor o feixe em modos espacialmente coerentes. Os poucos trabalhos que se conhecem de caracterização modal transversa através de medidas de coerência espacial, baseiam-se na correlação de dois pontos (interferómetro de Young ou análogos). Estes métodos esbarram com dificuldades experimentais, nomeadamente o número elevado de medições envolvidas numa análise bidimensional do campo e uma relativa dificuldade na medição da fase da função de coerência. Não surpreende pois que o único trabalho experimental publicado até hoje (Warnky, Anderson et al. 2000) capaz de extrair a composição modal unicamente a partir de medidas de coerência admita simplificações, a saber: separabilidade das coordenadas espaciais (análise a uma dimensão); perfis modais reais (apenas o módulo da coerência é medido sendo o sinal inferido por continuidade).

Um dos nossos propósitos é o de abordar o problema da análise modal transversa a partir de medidas de coerência, mesmo quando a separabilidade de coordenadas não é possível ou quando a fase da função de coerência é relevante. Ora, tal acontece em presença de modos espaciais degenerados em frequência, formando modos híbridos, que em geral não são espacialmente separáveis e têm perfis modais complexos.

1.3 Análise transversa com óptica difractiva

Uma técnica conhecida de análise modal transversa baseada em filtros holográficos ajustados aos modos do feixe (Soifer and Golub 1994) permite medir a distribuição modal de potência. O atractivo desta técnica é que a computação é essencialmente óptica, permitindo uma medida instantânea das potências modais. No entanto, é necessário que os filtros estejam ajustados aos modos a medir, ou seja, é necessário conhecer de antemão os perfis modais.

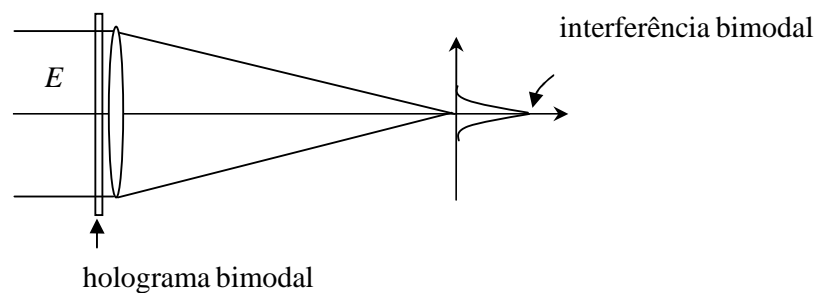


Fig. 1.2 Princípio da análise holográfica de coerência espacial: o centro do padrão de difracção dum holograma representando dois modos espaciais, com desfasamento variável, mede a correlação entre as componentes do campo naqueles modos.

Neste trabalho, propomos generalizar o método dos filtros ajustados, usando hologramas que representam pares de modos espaciais numa base arbitrária em vez de modos espaciais ajustados a modos de cavidade (fig. 1.2). Mostraremos que a matriz de correlação obtida por medidas de interferência entre os modos de cada par de elementos da dita base permite decompor o campo em modos espacialmente coerentes, a partir duma generalização da teoria de coerência no espaço das posições a um espaço de Hilbert. Tais modos deverão então ser interpretados, se possível, em termos de modos de cavidade.

É surpreendente que nenhum partido se tenha tirado até hoje, neste contexto, da flexibilidade actualmente oferecida por elementos difractivos dinâmicos, designadamente pelos moduladores espaciais de luz (SLM) electricamente endereçáveis. O objectivo primário é assim explorar a utilização de um SLM como

elemento difractivo numa técnica holográfica de análise modal transversa de feixes. Utilizámos um modulador do tipo TN-LCD (*twisted nematic liquid crystal display*) que o qual foi caracterizado através duma técnica interferométrica original.

1.4 Análise de coerência com difusão dinâmica

A coerência entre dois feixes costuma ser medida pelas franjas de interferência entre eles resultantes dum desfasamento relativo variável. Se a interferência ocorrer após a incidência num meio difusor, em vez de franjas teremos um padrão de granitado laser (speckle). Esperaríamos que o contraste de intensidade do speckle fosse máximo quando os feixes incidentes fossem mutuamente coerentes, e diminuísse à medida que a coerência mútua também diminuísse. O contraste de speckle seria assim uma medida da coerência mútua entre os feixes. Demonstramos que este argumento é válido sob certas condições e pode ser generalizado a múltiplos feixes incidentes.

Se o meio for dinâmico o speckle também o será, e em vez do contraste espacial poderemos analisar o contraste temporal dum grão de speckle. O argumento referido acima permanece válido desde que as partículas do meio se movam lentamente (i.e. se deslocem menos que um comprimento de onda durante o tempo de coerência dos feixes).

A análise de speckle dinâmico pode ser feita com a conhecida técnica de espectroscopia de correlação de fótons, que mede a autocorrelação de intensidade difundida, muito usada na caracterização de meios dispersos. Além disso, a utilização de detecção coerente, por meio de uma fibra monomodo, evita a perda de contraste associada a detectores com área finita.

Desenvolvemos assim um método de caracterização de coerência dum feixe laser baseado na análise de difusão dinâmica de luz com detecção coerente. Como aplicação principal do método proposto (Pereira, Ferreira et al. 2005), medimos o módulo do grau de coerência temporal dum feixe laser (autocorrelação do campo), fazendo incidir simultaneamente no meio esse feixe e uma réplica do mesmo com atraso relativo variável.

Apesar do método proposto só medir o módulo da coerência temporal (a difusão destrói a informação de fase), isso não parece ser um problema de maior, pois na

maioria dos casos a função de coerência é real (espectro simétrico) e o seu sinal pode ser inferido por continuidade. A técnica proposta permite ainda avaliar a coerência global transversa dum feixe com múltiplos modos espaciais.

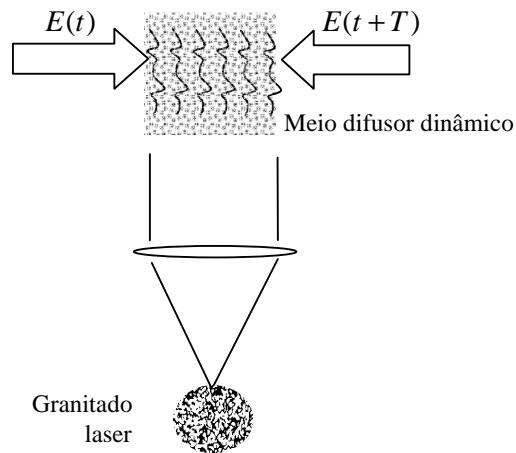


Fig. 1.3 Princípio da análise de coerência com difusão dinâmica de luz: o contraste de granitado laser diminui com a perda de coerência no volume difusor. Esta perda de coerência pode resultar, por exemplo, da incidência simultânea dum feixe laser e da sua réplica opticamente atrasada: neste caso é medida a coerência temporal do feixe.

1.5 Plano da tese

A presente tese pode imaginar-se dividida em duas partes: os capítulos 2, 3 e 4, tratando sobretudo da revisão da literatura, servem de fundamento para os capítulos 5, 6, e 7, que contêm essencialmente matéria de investigação. Todos os capítulos terminam com uma secção de conclusão. Segue-se uma descrição abreviada de cada capítulo:

- No capítulo 2, *Modos laser*, revê-se a teoria de modos Gaussianos superiores em cavidades de espelhos esféricos. Discutem-se as condições de ortogonalidade e degenerescência de frequências. Analisam-se algumas propriedades dos perfis de intensidade e de fase em feixes multimodo contendo modos híbridos;

- No capítulo 3, *Coerência de feixes laser*, aplica-se o conceito de coerência mútua a um modelo de feixe laser multimodo baseado nos conceitos apresentados no capítulo 2. Estuda-se a expansão em modos espacialmente coerentes e a inversão de coerência para análise modal transversa. Usando a notação bracket, a teoria da coerência espacial é formulada numa base de representação do campo arbitrária;
- No capítulo 4, *Técnicas de análise de feixes laser*, revêem-se as técnicas de análise longitudinal e transversa de feixes laser, e em particular as técnicas de análise modal transversa a partir de medidas de coerência espacial e de correlação espacial holográfica. Apresentam-se informalmente os princípios das técnicas de análise de coerência propostas, que serão expostas nos capítulos 6 e 7;
- No capítulo 5, *Modulador espacial de luz TN-LCD*, caracteriza-se um modulador espacial de luz, baseado num display de cristais líquidos, que foi utilizado como elemento difractivo na técnica exposta no capítulo 6. Propõe-se uma técnica interferométrica nova para a calibração das curvas de modulação complexa. O modulador é testado como gerador holográfico de modos Hermite-Gauss;
- No capítulo 6, *Análise modal transversa holográfica*, propõe-se uma técnica nova de análise modal transversa de feixes laser, baseada em óptica difractiva. A técnica é uma aplicação da teoria do capítulo 3 e utiliza o modulador espacial de luz caracterizado no capítulo 5. Analisa-se a composição modal transversa dum feixe de um laser He-Ne;
- No capítulo 7, *Análise de coerência com difusão dinâmica de luz*, apresenta-se um método para análise de coerência baseado em difusão dinâmica de luz. Estabelece-se a relação entre as flutuações de speckle e a coerência do campo incidente no volume difusor. Aplica-se o método à medição da coerência temporal dum feixe de Árgon e da coerência espacial global dum laser de He-Ne.

Capítulo 2

Modos laser

A ortogonalidade e a degenerescência de modos transversos são dois conceitos chave para a análise de propriedades de coerência de feixes laser (cf. cap. 3). Revemos os fundamentos sobre modos Gaussianos superiores de cavidades de espelhos esféricos estáveis, que são ortogonais e em geral degenerados. Analisamos algumas propriedades do perfil de intensidade e de fase de feixes multimodo afectas ao problema da análise transversa de feixes. A ênfase na família Hermite-Gauss justifica-se pelo uso que dela faremos na análise experimental transversa de um laser (cf. cap. 6).

Plano do capítulo

2.1 Introdução

2.2 Modos de propagação

2.2.1 Propagação paraxial

2.2.2 Modos Gaussianos

2.2.3 Transformação por lentes

2.3 Modos de cavidade

2.3.1 Cavidades de espelhos esféricos

2.3.2 Efeitos do meio activo

2.3.3 Ortogonalidade

2.4 Feixes multimodo

2.4.1 Modos degenerados

2.4.2 Frentes de onda

2.4.3 Perfil de irradiância

2.5 Conclusão

2.1 Introdução

As propriedades de coerência de um feixe laser dependem da sua composição em termos de modos numa cavidade ressonante envolvendo um meio activo. Neste capítulo revemos as propriedades modais do tipo de laser mais comum: laser gasoso com uma cavidade de espelhos esféricos.

Uma cavidade de espelhos esféricos, em configurações ditas estáveis, suporta modos polinomiais-Gaussianos, mutuamente ortogonais em potência, sendo os polinómios em causa dependentes das perturbações da simetria da cavidade. Para cavidades com astigmatismo simples, porventura a situação mais frequente, a simetria é rectangular e os modos são da família Hermite-Gauss.

O meio gasoso, com alargamento da curva de ganho não homogéneo, permite a coexistência de modos com diferentes frequências de oscilação num mesmo feixe competindo pelo mesmo ganho e afectando consequentemente a coerência espacio-temporal do feixe.

Geralmente modos espaciais de ordem diferente têm frequências de oscilação distintas. Contudo, a sobreposição de modos espaciais degenerados em frequência produz modos híbridos com implicações importantes nos perfis transversos de irradiância e de fase.

2.2 Modos de propagação

2.2.1 Propagação paraxial

Equação de onda paraxial

O campo eléctrico num feixe monocromático paraxial com frequência ω pode ser aproximado como uma onda plana modulada no plano transversal $\mathbf{p} = (x, y)$ e ao longo do eixo de propagação z

$$E(\mathbf{p}, z, t) = u(\mathbf{p}, z) \exp[i\omega t - ikz] + c.c., \quad (2.2.1)$$

onde k é a constante de propagação. Este campo obedece à equação de onda escalar de Helmholtz

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0. \quad (2.2.2)$$

Sendo a modulação longitudinal lenta, i.e. muito pequena na escala de um comprimento de onda $2\pi/k$, a substituição de (2.2.1) em (2.2.2) resulta na *equação de onda paraxial*

$$\nabla_T^2 u - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2.2.3)$$

cujas soluções podem ser escritas como um integral de propagação de Huygens-Fresnel que permite calcular o campo num plano z a partir do campo fonte em $z = 0$ (Goodman 2005).

$$u(\mathbf{p}, z) = \frac{i}{\lambda z} \iint u(\mathbf{p}_0, 0) \exp \left[-ik \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2}{2z} \right] d^2 \mathbf{p}_0. \quad (2.2.4)$$

Para um campo quase monocromático, dito com *banda estreita*,

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta k}{k} \approx \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \ll 1, \quad (2.2.5)$$

o comprimento de onda em (2.2.4) deve ser entendido como o comprimento de onda central $\bar{\lambda}$.

Campo distante

Muito longe da fonte (campo distante ou *far-field*), mais precisamente para distâncias muito superiores à distância de Rayleigh z_R ¹

¹ A distância de Rayleigh é frequentemente definida em termos do diâmetro da fonte d , como d^2/λ . Para campos não limitados transversalmente, a definição usada (2.2.6), onde $\langle \dots \rangle$ designa a média pesada pela irradiância do campo, é mais adequada e consistente com a definição de distância de Rayleigh para um feixe Gaussiano.

$$z \gg z_R \equiv 4\pi \langle \mathbf{p}_0^2 \rangle / \lambda, \quad (2.2.6)$$

o campo em z , a menos de um factor comum de onda esférica, é aproximadamente a transformada de Fourier $\widetilde{u}_0(\mathbf{f})$ do campo fonte (*difracção de Fraunhofer*) :

$$u(\mathbf{p}, z) \approx \frac{i}{\lambda} \exp \left[-ik \frac{|\mathbf{p}|^2}{2z} \right] \widetilde{u}(\mathbf{f}). \quad (2.2.7)$$

com frequências espaciais $\mathbf{f} = \mathbf{p}/\lambda z$.

O par de Fourier $(x, f_x = x/\lambda z)$, numa direcção transversa x qualquer, obedece, pela desigualdade de Schwartz, à *relação de incerteza* (Elmore and Heald 1985)

$$\sigma_x \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (2.2.8)$$

onde σ designa a raiz média quadrática transversa:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &\equiv \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 |u|^2 \right\rangle / \left\langle |u|^2 \right\rangle \\ \sigma_f^2 &\equiv \left\langle (f - \langle f \rangle)^2 |\widetilde{u}|^2 \right\rangle / \left\langle |\widetilde{u}|^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

A desigualdade (2.2.8) traduz o facto de qualquer feixe paraxial confinado ter uma divergência limitada

$$divergência \equiv \frac{2\sigma(z \gg z_R)}{z} \geq \frac{\lambda}{2\pi\sigma(0)}. \quad (2.2.10)$$

2.2.2 Modos Gaussianos

Feixe Gaussianos

Uma solução simples da equação de onda paraxial é a gerada por uma abertura em (x_0, y_0) com raio muito pequeno (menor que λ) w_0 , resultando, de acordo com (2.2.4), numa onda esférica (aproximação parabólica) com raio z :

$$u(x, y, z) = u_0 i \frac{z_0}{z} \exp \left[-ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z} \right]. \quad (2.2.11).$$
$$z_0 \equiv \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

A onda esférica (2.2.11) no entanto não é paraxial: o campo não é confinado transversalmente pois a amplitude transversa é constante.

Substituindo a variável z por uma variável complexa, *raio complexo de feixe* (Siegman 1986),

$$q(z) \equiv z + iz_R, \quad (2.2.12)$$

e notando que $du/dz = du/dq$, a equação paraxial (2.2.3) pode ser rescrita em termos de q e a solução esférica (2.2.11) pode ser generalizada:

$$u(x, y, z) = u_0 \frac{q(0)}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right]. \quad (2.2.13)$$

Decompondo q nas componentes real e imaginária,

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}, \quad (2.2.14)$$

a parte real representa uma onda esférica de raio $R(z)$ enquanto a parte imaginária determina uma envolvente de amplitude Gaussiana onde $w(z)$ é o *raio do feixe* (para o qual a amplitude decai $1/e$ em relação ao máximo central).

De acordo com (2.2.12), em $z = 0$, q é imaginário, o que implica através de (2.2.14) que o feixe está colimado, $R = \infty$, e que z_R , *distância de Rayleigh* do feixe é

$$z_R = \pi \frac{w^2(0)}{\lambda}. \quad (2.2.15)$$

Eliminando q entre (2.2.12) e (2.2.14) e usando (2.2.15) resulta para o raio do feixe e raio de curvatura da frente de onda

$$w(z) = w(0) \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}; \quad (2.2.16)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.2.17)$$

Dado o comprimento de onda, o feixe Gaussiano é totalmente determinado por dois parâmetros (fig. 2.1): raio $w(0)$ (ou correspondente distância de Rayleigh) e posição ($z=0$) da cintura de feixe.

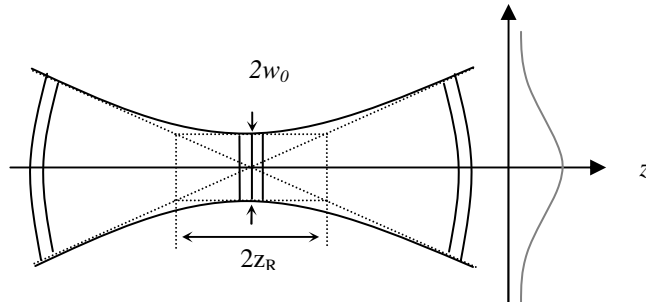


Fig. 2.1 Perfil do feixe Gaussiano.

A divergência do feixe é dada por

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w}{z} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad (2.2.18)$$

que, de acordo com (2.2.10), é a divergência mínima que um feixe paraxial confinado pode ter (o raio da intensidade do feixe Gaussiano é $w \equiv 2\sigma$).

A amplitude complexa do feixe é

$$\frac{q(0)}{q(z)} = \frac{iz_R}{z + iz_R} \equiv A(z) \exp[i\varphi(z)] \quad (2.2.19)$$

donde resulta uma atenuação do mesmo à medida que se expande, conservando a energia,

$$A(z) = \frac{w(0)}{w(z)} \quad (2.2.20)$$

e um desvio da fase (em relação a uma onda plana)

$$\varphi(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.2.21)$$

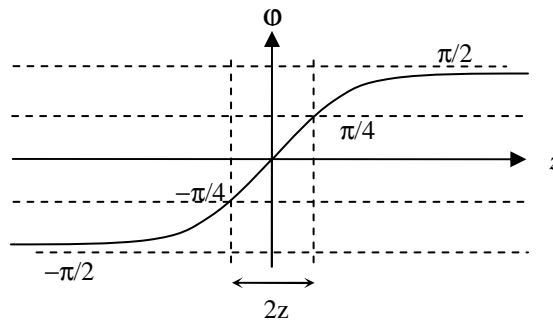


Fig. 2.2 Desvio de fase de Gouy na zona focal de um feixe Gaussiano.

O desvio de fase expresso em (2.2.21), ver fig. 2.2, é um caso particular do *efeito Gouy* (do nome do seu descobridor em 1809) que consiste numa "aceleração" da fase provocado pela focagem de um espacialmente feixe coerente, que faz com que o comprimento de onda focal seja ligeiramente comprimido (Feng and Winful 2001). O desvio total entre $-\infty$ e ∞ é π (tal desvio já existia na onda esférica, mas de forma abrupta, e expresso pelo factor i em (2.2.11).

A expressão do campo do *feixe Gaussiano* é então, usando (2.2.1)

$$E(\rho, z, t) = u_0 \frac{w(0)}{w(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2R(z)}\right] \times \exp\left[i\omega t - ikz + i \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)\right]. \quad (2.2.22)$$

que se reduz a uma onda plana no limite $z_R \rightarrow \infty$ e a uma onda esférica no limite $z_R \rightarrow 0$.

Modos Hermite-Gauss superiores

A solução Gaussiana tem a propriedade de ser a transformada de Fresnel (2.2.4) (escalada) de si mesma, por isso se diz que é um *modo* de propagação livre. Mais em geral, sabe-se que a generalização da expressão (2.2.22)

$$E_{mn}(x, y, z, t) = u_{mn} \frac{w(0)}{w(z)} H_n\left[\frac{\sqrt{2}x}{w(x)}\right] H_m\left[\frac{\sqrt{2}y}{w(y)}\right] \times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right] \times \exp\left[i\omega t - ikz + i(m+n+1) \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)\right] \quad (2.2.23)$$

onde H_n é o polinómio de Hermite de grau n , também é um modo de propagação que satisfaz igualmente a equação de onda paraxial: modo Hermite-Gauss de ordem (m, n) . Os polinómios de Hermite podem definir-se de forma recursiva:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

sendo o feixe Gaussiano o modo Hermite–Gauss de ordem $n = m = 0$. A fase de Gouy varia agora com $m + n$:

$$\varphi_{mn}(z) = (m + n + 1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.2.25)$$

Estes modos foram observados imediatamente após a invenção do laser, com excelente aproximação à teoria (Kogelnik and Rigrod 1962).

Os polinômios de Hermite são ortogonais com respeito a uma Gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \exp(-x^2) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & m = n \end{cases} \quad (2.2.26)$$

e por isso os modos Hermite-Gaussiano (após normalização) formam uma base completa ortonormada

$$\int E_{mn} E_{m'n'}^* dx dy = \begin{cases} 0 & (m, n) \neq (m', n') \\ 1 & (m, n) = (m', n') \end{cases}. \quad (2.2.27)$$

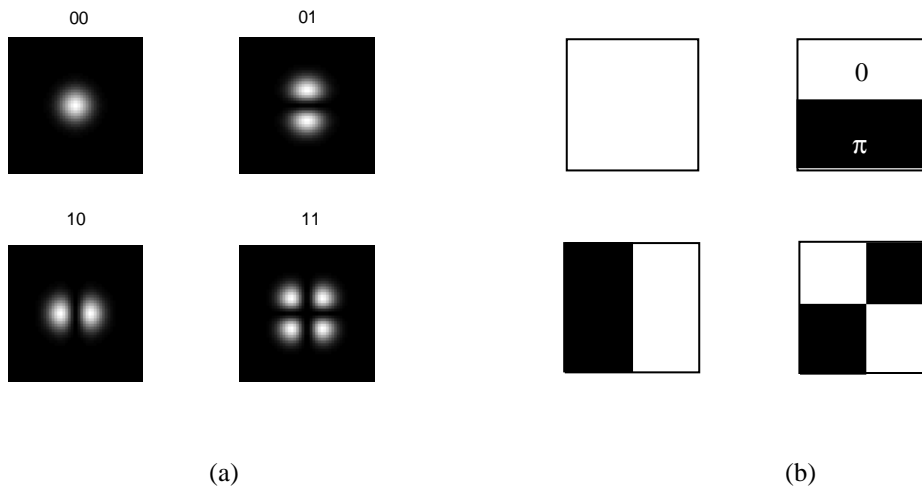


Fig. 2.3 Perfis transversos de alguns modos Hermite-Gaussianos: (a) intensidade; (b) fase.

Feixes Gaussianos em coordenadas cilíndricas e elípticas

Em coordenadas cilíndricas, a equação de onda paraxial admite soluções do tipo Laguerre-Gauss (Kogelnik and Li 1966). Estes modos podem exprimir-se como combinações finitas de modos Hermite-Gauss, dada a relação de identidade entre polinómios de Laguerre e adição de polinómios de Hermite (Kimel and Elias 1993), mas apresentam vorticidades e singularidade nos respectivos padrões de fase. Recentemente, descobriu-se uma terceira família de modos Gaussianos em coordenadas elípticas, modos Ince-Gauss (Schwarz, Bandres et al. 2004) que tem como casos limites os modos Hermite- e Laguerre-Gauss.

Independentemente do sistema de coordenadas, a família de modos Gaussianos associada TEM_{mn} (Transverse Electro Magnetic)² forma uma base completa de expansão do campo dum feixe coerente, dentro da aproximação paraxial; a escolha de um sistema de coordenadas depende da simetria do meio. Além disso, todas as famílias de modos Gaussianos partilham o mesmo modo fundamental, feixe Gaussiano caracterizado pelo parâmetro raio complexo de feixe.

2.2.3 Transformação por lentes

Lei ABCD

A propagação de raios em sistemas ópticos paraxiais não astigmáticos é descrita pela lei ABCD que relaciona a posição x e inclinação θ dum raio entrada do sistema com a posição x' e inclinação θ do mesmo à saída. Numa direcção transversa arbitrária:

$$\begin{bmatrix} x' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.2.28)$$

O parâmetro raio de feixe complexo dum modo Gaussiano é descrito pela lei correspondente (Siegman 1986)

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \quad (2.2.29)$$

² Na aproximação paraxial o campo eléctrico e magnético são ambos transversais à direcção de propagação.

Conhecida a matriz de transferência de um sistema óptico, o raio complexo de feixe e portanto a amplitude e distribuição transversa de campo de qualquer modo Gaussiano pode ser calculada. A consequência importante desta lei é a de que um sistema de lentes não astigmático qualquer (formação de imagem, focagem, colimação, expansão, etc.) preserva a estrutura de um modo Gaussiano. Em particular, a distribuição de campo numa cintura de feixe que ocorra no sistema é sempre a mesma, a menos de um factor de escala e eventualmente dum desvio de fase de Gouy.

Transformada de Fourier

Um exemplo relevante é o de um estágio de Fourier formado entre os planos focais de uma lente com distância focal f , descrito pela matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.30)$$

Se um modo Hermite-Gauss de ordem (m,n) estiver focado no plano de Fourier de entrada, $R = \infty$ e $w = w_0$ e a aplicação da lei (2.2.29) dá os parâmetros de feixe à saída:

$$\begin{aligned} w_0' &= \frac{\lambda f}{\pi w_0} \\ R' &= \infty \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Assim, a transformada de Fourier dum modo Hermite-Gauss é o mesmo modo escalado, de acordo com a difracção mínima de um feixe Gaussiano, e com um desvio de fase de Guoy

$$\Delta\varphi_{Gouy} = (m+n+1) \left[\tan^{-1} \left(\frac{f}{z_R} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{f}{z_R'} \right) \right]. \quad (2.2.32)$$

Sendo z_R e z_R' as distâncias de Rayleigh nos planos focais de entrada e de saída respectivamente. Na situação típica em que $z_R \gg f$ e $z_R' \ll f$, $\Delta\varphi_{Gouy} = (m+n+1)\pi/2$.

As previsões da lei ABCD para feixes Gaussianos diferem em geral das da óptica geométrica; no entanto, se todas as distâncias pertinentes (distâncias focais, distâncias dos objectos e imagens em relação aos planos focais principais) forem muito maiores do que as distâncias de Rayleigh do feixe, a óptica geométrica é uma boa aproximação.

Para sistemas com astigmatismo simples (sistemas com eixos astigmáticos ortogonais), cada eixo astigmático tem a sua matriz ABCD. Em tais sistemas, a posição e raio da cintura de feixe será diferente nas duas direcções astigmáticas x e y e o feixe Gaussiano é caracterizado por quatro parâmetros: dois raios de feixe e duas posições de cintura de feixe.

2.3 Modos de cavidade

2.3.1 Cavidades de espelhos esféricos

Condição de estabilidade

Um feixe Gaussiano pode ser ajustado a uma cavidade de dois espelhos esféricos, fig. 2.4, com curvaturas R_1 e R_2 separados duma distância³ L desde que o raio da frente de onda se ajuste ao raio dos espelhos nas respectivas posições z_1 e z_2 medidas em relação à cintura de feixe ($z = 0$).

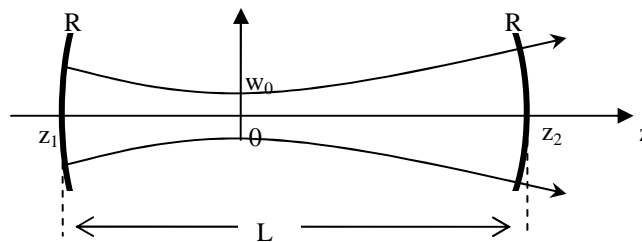


Fig. 2.4 Cavidade de espelhos esféricos ajustada a um feixe Gaussiano.

O espelho de acoplamento 2 transmite uma pequena fracção do feixe.

³ A inserção de um meio activo com comprimento l e índice de refração n , diminui o comprimento efectivo da cavidade: $L_{\text{effect}} = L - l(n-1)/n$. Este efeito é pouco importante para lasers gasosos.

Utilizando a expressão do raio da frente de onda (2.2.17) e introduzindo os habituais *parâmetros g da cavidade* (Siegman 1986)

$$g_1 \equiv 1 - \frac{L}{R_1}; \quad g_2 \equiv 1 - \frac{L}{R_2}, \quad (2.3.1)$$

resulta para as posições dos espelhos relativamente à cintura do feixe (que pode estar dentro ou fora da cavidade)

$$z_1 = \frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2-2g_1g_2}L; \quad z_2 = z_1 + L, \quad (2.3.2)$$

e para o raio da cintura de feixe fica determinado (para um dado comprimento de onda)

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}}. \quad (2.3.3)$$

Como a condição de ajuste da frente de onda não depende da direcção de propagação, ela possibilita a existência de feixes Gaussianos estacionários, resultantes da propagação de dois feixes Gaussianos idênticos em direcções opostas.

O raio de feixe, dado pela expressão acima, só é real se (fig. 2.5)

$$0 \leq g_1g_2 \leq 1, \quad (2.3.4)$$

equivalendo a afirmar que, no tratamento geométrico da cavidade, raios sucessivamente reflectidos entre os dois espelhos são periodicamente refocados em vez de divergirem indefinidamente do eixo da cavidade. As cavidades que obedecem à condição (2.3.4) são ditas *estáveis*. Se a condição de estabilidade for satisfeita, os espelhos são superfícies equifase (campo real).

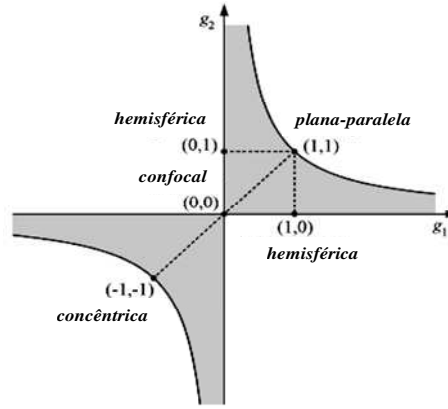


Fig. 2.5 Região de estabilidade de uma cavidade de espelhos esféricos.

A condição para que as perdas de difracção associadas ao raio finito dos espelhos, a_1 e a_2 , sejam desprezáveis exprime-se através do *número de Fresnel* da cavidade:

$$N_F \equiv \frac{a_1 a_2}{\lambda L} \gg 1. \quad (2.3.5)$$

Para cavidades com grandes números de Fresnel, a transição entre cavidades estáveis e instáveis é abrupta e determinada pelas curvas da fig. 2.5.

Condição de ressonância

Além da condição de confinamento do campo, para termos um campo estacionário é ainda necessário impor a condição de que o comprimento da cavidade seja igual a um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda. Para modos Hermite-Gaussiano, resulta da expressão do desvio de fase de Gouy,

$$\nu_{p,m,n} = \frac{c}{2L} \left\{ p + (m + n + 1) \frac{\cos^{-1}(\sqrt{g_1 g_2})}{\pi} \right\} \quad (2.3.6)$$

onde p é um inteiro e c é a velocidade da luz no vázio⁴. Os modos com o mesmos números (m, n) têm espaçamento $c/2L$ e são ditos *longitudinais*. De acordo com (2.3.6) os modos superiores (m,n) desdobram o espectro de frequências do modo fundamental $(0,0)$, como ilustra a fig. 2.6.

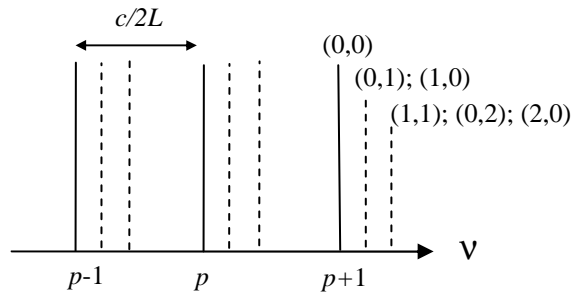


Fig. 2.6 Desdobramento do espectro longitudinal associado a modos superiores da mesma ordem $(m+n)$.

2.3.2 Efeitos do meio activo

Largura de banda modal

Para uma cavidade livre, as perdas num percurso de ida e volta determinam uma queda progressiva da intensidade do campo que corresponde a uma largura de banda de cavidade finita. Se as perdas se deverem à reflectância dos espelhos r_1 e r_2 apenas, a largura de banda da cavidade é dada por (Milonni and Eberly 1988)

$$\delta\nu_c = \frac{c}{2L} \frac{1 - r_1 r_2}{4\pi} \quad (2.3.7)$$

Para espelhos com reflectância $r_1 = 1$ e $r_2 = 99\%$ esta largura é da ordem de um milésimo da separação entre as frequências modais $c/2L$; Para um laser com $L=30\text{cm}$, o espaçamento de frequências é de 500MHz , resultando numa largura de banda da cavidade de 1MHz ⁵.

⁴ Se a cavidade contiver um meio activo de comprimento l e índice de refração n , L deve ser substituído pelo comprimento óptico $L_{\text{opt}} = L + (n-1)l$. Para laser gasosos a diferença é pouco importante.

⁵ Na prática a largura de banda é um pouco superior devido a imperfeições nos espelhos.

Par uma cavidade laser, em que a amplificação por emissão estimulada compensa as perdas da cavidade, esperar-se-ia um campo com intensidade constante e por isso com largura espectral nula. No entanto a emissão espontânea entre os níveis laser adiciona radiação incoerente ao feixe, limitando a largura de banda da emissão a um mínimo fundamental, a largura de Schawlow-Townes (ibid.):

$$\delta\nu_{\min} = \frac{N_2}{\Delta N_t} \frac{8\pi h\nu}{P} (\delta\nu_c)^2 \quad (2.3.8)$$

onde N_2 e ΔN_t são a população do nível excitado e a inversão de população limiar e P é a potência de saída do laser. Para a mesma cavidade referida e $N_2 \sim \Delta N$ a largura de banda mínima alcançável seria de 0.001 Hz. Na prática este limite é dificilmente atingido devido a vibrações mecânicas dos espelhos, flutuações térmicas do meio e imperfeições nos espelhos.

Espectro emitido

O meio activo num laser constitui um amplificador óptico com uma frequência de ressonância e largura de banda correspondentes à frequência de transição entre níveis atômicos de transição laser e largura do perfil de linha de transição. Numa cavidade laser com meio activo os modos da cavidade emitidos são aqueles para os quais o ganho compensa as perdas, incluindo as perdas de difracção que são maiores para modos transversos superiores. É difícil prever quais os modos que vão oscilar pois há uma competição entre modos pelo ganho, as perdas dependem da estrutura espacial modal e efeitos não lineares produzem acoplamento entre modos especialmente em cavidades degeneradas (Paschotta 2006).

Para meios com alargamento homogéneo, a amplificação de um modo da cavidade satura o ganho globalmente (abaixamento da curva de ganho) diminuindo assim o ganho disponível para modos vizinhos; nestas condições a competição entre modos leva à sobrevivência do modo com maior ganho (ou dois se tiverem equidistantes da frequência

central de transição do meio), resultando num feixe monomodo⁶. Para meios com alargamento inhomogéneo, nomeadamente alargamento Doppler em lasers gasosa, a saturação do ganho ocorre localmente, ou seja diferentes modos da cavidade com distintas frequências saturam o ganho de forma independente. Neste caso os modos emitidos são aqueles para os quais o ganho inicial (não saturado) supera a perda da cavidade (fig. 2.7) e o feixe será multimodo.

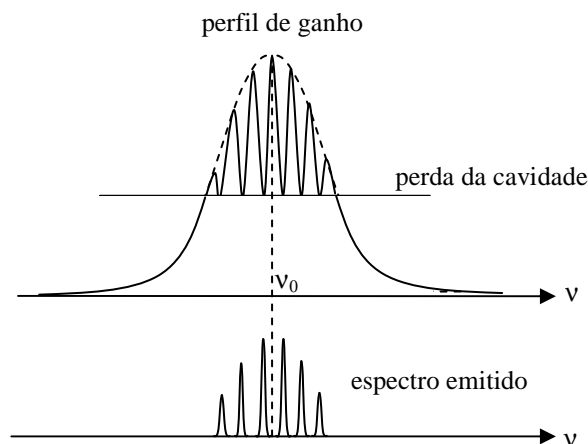


Fig. 2.7 Selecção modal imposta pelo meio no caso de alargamento inhomogéneo (ex. alargamento Doppler) Apenas os modos com frequências para as quais o ganho inicial (tracejado) supera a perda na cavidade são emitidos. A saturação do ganho (curva contínua) iguala o ganho à perda originando buracos na curva de ganho.

Seleccção modal

O número de modos longitudinais suportados num laser com alargamento não homogéneo é tanto menor quanto maior for o espaçamento entre modos ou seja menor o comprimento da cavidade. Não sendo possível ou desejável diminuir este comprimento, a selecção modal (Smith 1972) costuma ser feita recorrendo a selectores de frequência adicionais, nomeadamente uma cavidade passiva estreita dentro da cavidade ou uma rede de difracção substituindo um dos espelhos.

A maneira usual de impedir que modos transversos de ordem superior sejam

⁶ Excepto quando existe *spatial hole burning* ie a saturação do meio em regiões complementares devido à diferente distribuição espacial de diferentes modos.

gerados pelo laser é introduzir uma abertura intra-cavidade que aumenta substancialmente as perdas de modos superiores que têm um perfil espacial mais alargado. Espelhos de reflectividade variável (De Silvestri, Magni et al. 1990) e moduladores de fase intracavidade também são utilizados com a mesma finalidade.

Perfis espaciais

O tipo de modos transversos suportados por uma cavidade de espelhos esféricos estável depende da simetria da cavidade ou de perturbações da mesma, incluindo o alinhamento dos espelhos. É comum em cavidades com espelhos esféricos, mesmo confocais caso em que a sensibilidade ao alinhamento dos espelhos é mínima, observar-se a ocorrência de modos Hermite-Gauss, apesar da simetria cilíndrica do sistema; isso deve-se provavelmente à quebra de simetria associada a elementos astigmáticos como janelas de Brewster e prismas, ou a tensões nos espelhos, que levantam ainda as degenerescências entre modos com o mesmo valor de $(m+n)$ (Hanna 1969).

Geralmente o fabricante procura um laser oscilando no modo transversal fundamental puramente Gaussiano TEM₀₀ (com um ou mais modos longitudinais) pois tal garante a máxima focabilidade do feixe. Quando uma aplicação requer um perfil espacial particular (por exemplo modos Laguerre) o feixe pode ser transformado externamente recorrendo a conversores astigmáticos (Beijersbergen, Allen et al. 2003) ou a elementos ópticos difractivos (Kennedy, Szabo et al. 2002).

Por causa do efeito não linear de saturação do ganho (o ganho numa região de campo mais intenso é menor que noutra região onde o campo é menor) os campos diferem dos de uma cavidade passiva. Apesar disso (Fox and Li 1966) estimaram que o efeito de saturação do meio produz uma perturbação pequena em relação aos modos de uma cavidade passiva.

2.3.3 Ortogonalidade

Cavidades com perdas de difracção

Em geral as aberturas dos espelhos produzem efeitos de difracção que causam uma

atenuação do campo em cada reflexão; por isso é costume chamar *modo de cavidade* a uma configuração de campo cuja distribuição relativa se mantêm após propagação numa volta completa da cavidade, a menos de um factor que traduz uma atenuação ou desfasamento (Fox and Li 1961).

Na abordagem de Fox e Li, o campo no espelho (2) é calculado a partir do campo no espelho (1) através de um integral de propagação. Sendo s_1 e s_2 coordenadas da superfície dos espelhos.

$$\begin{aligned} E_2^{(n)}(s_2) &= \int_{S_1} K_1(s_2, s_1) E_1^{(n)}(s_1) dS_1 \\ E_1^{(n+1)}(s_1) &= \int_{S_2} K_2(s_1, s_2) E_2^{(n)}(s_2) dS_2 \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

onde K_i é o Kernel de propagação do espelho (1) para (2). Analogamente o campo propagado de volta para (1) a partir do espelho (2) usando o Kernel inverso K_2 . A condição "modo de cavidade" equivale então à convergência geométrica do cálculo de propagação iterado:

$$\frac{E_2^{n+1}}{E_2^n} \rightarrow \gamma \quad (2.3.10)$$

Partindo de uma distribuição inicial uniforme, este método iterado de cálculo converge, em geral, para o modo fundamental. Para calcular modos superiores, Fox e Li estenderam a técnica, sintonizando o comprimento de onda antes de cada iteração, obtendo assim modos “ressonantes”: configurações de campo que se mantêm após propagação numa volta completa da cavidade a menos de um factor de atenuação apenas (fase múltipla de 2π).

A equação total de propagação de ida-e-volta pode escrever-se, no limite de *auto-consistência* do campo

$$\gamma E_2(s_2) = \int_{S_1} \int_{S_2} K_1(s_2, s_1) K_2(s_1, s_2') E_2(s_2') dS_2' dS_1, \quad (2.3.11)$$

ou, de forma mais compacta,

$$\gamma E_2(s_2) = \int_{s_2} K(s_2, s_2') E_2(s_2') dS_2' \quad (2.3.12)$$

se definir o propagador de ida-e-volta na cavidade K :

$$K(s_2, s_2') \equiv \int_{s_1} K_1(s_2, s_1) K_2(s_1, s_2') dS_1 \quad (2.3.13)$$

A equação (2.3.12) é uma equação integral de valores próprios de Fredholm, sendo os modos da cavidade as suas funções próprias, cujos valores próprios

$$\gamma \equiv |\gamma| \exp[i\beta] \quad (2.3.14)$$

traduzem uma atenuação $\alpha = 1 - |\gamma|^2$, associada a perdas por difracção ou outras, e um desfasamento (além de $2kL$) numa volta completa $\beta = \arg\{\gamma\}$.

Vários autores demonstram a existência de funções próprias para kernel de cavidades com espelhos finitos planos e esféricos; contudo a solução analítica só é conhecida no caso de cavidades confocais (Boyd and Gordon 1961).

Condição de ortogonalidade

A equação de Fox e Li *não é hermitica* (nem mesmo no caso mais simples de propagação entre dois espelhos planos paralelos em que o kernel da cavidade é igual ao da propagação livre num distância $2L$), o que significa que não há garantia de ortogonalidade entre modos transversos distintos e, em geral, os valores próprios (2.3.14) não são reais. É possível, mesmo assim, estabelecer algumas condições gerais de ortogonalidade.

Sempre que o propagador de ida e volta total definido por (2.3.13) for simétrico

$$K(s_2, s_2') = K(s_2', s_2), \quad (2.3.15)$$

o campo *nos espelhos* deve obedecer à relação de ortogonalidade não hermitica

$$\int_s E_m(s) E_n(s) ds = 0, \quad m \neq n. \quad (2.3.16)$$

Isto acontece em qualquer cavidade de espelhos com reflectividade constante, mesmo não esféricos, sempre que a perda por difracção seja desprezável. O campo nos planos transversos tangenciais aos espelhos difere do campo nos espelhos de um fasor que descreve a curvatura dos mesmos; após inclusão deste fasor em (2.3.16) recupera-se novamente a relação de ortogonalidade hermítica, como no caso dos modos Gaussianos de cavidades de espelhos esféricos.

No entanto, se os espelhos tiverem reflectividade variável, ou se estivermos interessados no campo para além dos espelhos (como acontece no acoplamento de algumas cavidades instáveis (Siegman 1974), fig. 2.8, a condição (2.3.15), não se verifica. Nestes casos pode mostrar-se que o campo propagando-se no sentido do espelho 1 para o espelho 2 (campo directo) satisfazem uma relação de *bi-ortogonalidade* em qualquer plano transverso da cavidade (Siegman 1986):

$$\int E_m^{(12)}(s) E_n^{*(21)}(s) ds = 0, \quad m \neq n. \quad (2.3.17)$$

A biortogonalidade é uma característica geral de modos guiados por perdas ou ganhos da cavidade e não pela geometria (raios de curvatura, perfis de índice de refracção) do meio.

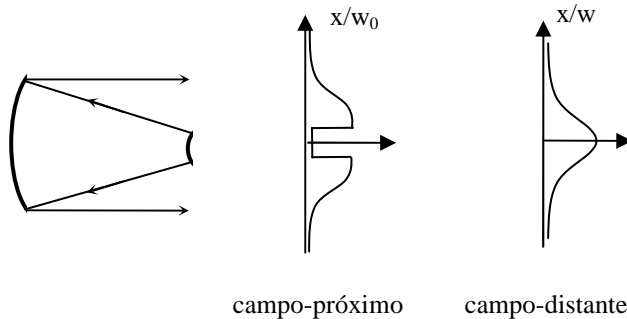


Fig. 2.8 Cavidade instável típica: O campo propagando-se da direita para a esquerda é distinto do propagado no sentido inverso. O acoplamento de saída é feito por transbordo do espelho convexo.

2.4 Feixes multimodo

A sobreposição coerente de modos Gaussianos superiores degenerados em frequência de uma cavidade produz alguns resultados inesperados tais como alteração da simetria dos campos de irradiância e frentes de onda não esféricas. Estas particularidades têm impacto na análise de coerência transversa de feixes laser (cap. 4).

2.4.1 Modos degenerados

Degenerescência de frequência em cavidades ideais

Dois *modos transversos*⁷ distintos com o mesmo espectro longitudinal de frequências são ditos *degenerados* ou ressonantes. Os modos transversos de uma cavidade de espelhos esféricos estável ideal com o mesmo valor de $m+n$ são sempre degenerados, independentemente configuração da cavidade (ponto no diagrama de estabilidade na zona estável)

$$\nu_{p,m,n} = \nu_{p,m',n'} \quad \Leftarrow m+n = m'+n' \quad (2.4.1)$$

Para certas configurações de cavidades de espelhos esféricos, ditas *degeneradas*, a separação de frequências entre modos transversos vizinhos (incremento de uma unidade num dos índices de modo m ou n) é um submúltiplo da separação de frequências de modos longitudinais. O caso extremo é o de uma cavidade confocal ($R_1 = R_2 = L$), na qual a separação entre modos transversos é metade da separação entre modos longitudinais. As frequências de ressonância são então

$$\nu_{p,m,n} = \frac{c}{2L} \left\{ p + \frac{1}{2}(m+n+1) \right\} \quad (\text{cavidade confocal}) \quad (2.4.2)$$

havendo apenas dois espectros possíveis para modos transversos: modos pares ($m+n$ par),

⁷ É costume chamar-se "modo transverso" ao conjunto de modos com os mesmos valores de (m,n).

com espectro longitudinal idêntico ao modo fundamental TEM_{00} ; e modos ímpares ($m+n$ ímpar) com espectro desviado $c/4L$ em relação ao modo TEM_{00} .

Modos degenerados em cavidades reais

A teoria de cavidades de espelhos esféricos estáveis ideais prevê a existência de modos transversos degenerados - com a mesma frequência de oscilação. Numa cavidade real, as anisotropias dos espelhos, do meio ou de quaisquer elementos na cavidade, quebram a simetria e levantam as degenerescências, produzindo modos quase degenerados e um correspondente batimento entre frequências próximas, o que foi confirmado experimentalmente (Goldsborough 1964).

É pois comum na literatura devotada à análise de feixes (ver cap. 4) admitir que todos os modos transversos são não degenerados e por isso mutuamente incoerentes. Não obstante observado (Lugiato, Oldano et al. 1988; Tamm 1988) que quando dois modos são quase degenerados, pode ocorrer um efeito cooperativo, induzido por acoplamento não linear, que faz produzir um *locking* de frequência, formando modos híbridos coerentes. No que respeita a este trabalho, onde estamos interessados na análise modal transversa de feixes laser, este ponto é essencial.

2.4.2 Frentes de onda

Os modos Gaussiano provenientes de cavidades de espelhos esféricos estáveis e na ausência de aberrações têm frentes de onda esféricas (ou plana na cintura de feixe). No entanto, a sobreposição coerente de modos Gaussianos superiores pode gerar feixes com frentes de onda não esféricas. De facto a fase da combinação de dois modos é dada por

$$Fase = Arg \left\{ a H_n H_m + b H_n' H_m' \right\}, \quad a, b \text{ complexos} \quad (2.4.3)$$

Por exemplo para a combinação linear de modos Hermite-Gauss $(10)+i(01)$, que corresponde ao modo Laguerre-Gauss $(0,1)$, a fase na cintura de feixe é dada por

$$\text{Arg} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0} + i \frac{\sqrt{2}y}{w_0} \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) \right\} = \tan^{-1}(y/x) \quad (2.4.4)$$

A fig. 2.9 mostra o perfil de irradiância em forma de donut e de fase em forma de hélice correspondente.

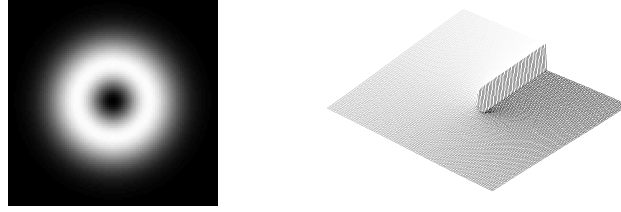


Fig. 2.9 Perfil de intensidade e fase do primeiro modo híbrido HG(10)+iHG(01).
A irradiância tem simetria radial. A frente de onda é helicoidal.

O ponto essencial a reter é que modos híbridos como o da fig. 2.9 têm perfis transversos com valores complexos i.e. as superfícies equifase não são esféricas.

2.4.3 Perfil de irradiância

Estacionaridade da irradiância

Qualquer feixe paraxial escalar quase-monocromático e parcialmente coerente pode ser expandido numa base arbitrária de modos Gaussianos com perfil transversal ϕ_n escalados com o raio do modo fundamental w

$$E(\mathbf{p}, z, t) = \exp(i\bar{k}z - \bar{\omega}t) \sum_n c_n(t) \exp^{i\varphi_n(z)} \phi_n(\mathbf{p}/w(z)) \quad (2.4.5)$$

tendo cada modo uma modulação temporal c_n e um desvio de fase de Gouy φ_n . A intensidade do feixe é então

$$I(\mathbf{p}, z) = \sum_{n, n'} \overline{c_n^*(t) c_{n'}(t)} \exp[i[\varphi_n(z) - \varphi_{n'}(z)]] \phi_n^*(\mathbf{p}/w(z)) \phi_{n'}(\mathbf{p}/w(z)) \quad (2.4.6)$$

Em geral o perfil transversal de intensidade não escala com o raio w , uma vez que as fases de Gouy são arbitrárias.

Se um feixe for proveniente de uma cavidade de espelhos esféricos estável, os modos da decomposição são os modos Gaussianos da cavidade, cujas fases de Gouy são comuns para modos degenerados e distintas para modos não degenerados que assumimos descorrelacionados, ou seja

$$\overline{c_n^* c_{n'}} = 0 \Leftrightarrow \varphi_n \neq \varphi_{n'}. \quad (2.4.7)$$

Então os termos com correlação cruzada não nula têm factores de Gouy que se cancelam e a expressão da intensidade pode escrever-se simplesmente

$$I(\mathbf{p}, z) = \sum_{n, n'} \overline{c_n^*(t) c_{n'}(t)} \phi_n^*(\mathbf{p}/w(z)) \phi_{n'}(\mathbf{p}/w(z)) \quad (2.4.8)$$

que toma a forma

$$I = I \left(\frac{\mathbf{p}}{w(z)} \right). \quad (2.4.9)$$

Conclui-se, como é sabido, que irradiância de um feixe multimodo proveniente de uma cavidade de espelhos esféricos estável é *estacionária* i.e. independente da distância de propagação a menos de um factor de escala.

Factor de propagação

Como um feixe multimodo gaussiano de uma cavidade estável tem um perfil de irradiância que escala da mesma forma que o modo fundamental, o raio W do feixe multimodo (em

qualquer direcção x) varia com a distância de propagação z como o raio w do modo Gaussiano fundamental magnificado M vezes:

$$\frac{W^2}{M^2}(z) = \frac{W_0^2}{M^2} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\pi \frac{W_0^2}{M^2}} z \right)^2 \right] \quad (2.4.10)$$

Pode mostrar-se que (Bélanger, Champagne et al. 1994) que para um feixe paraxial arbitrário, a equação anterior continua válida, desde que o raio seja definido pelo segundo momento centrado do perfil de intensidade

$$W \equiv 2\sigma; \quad \sigma^2 = \frac{\int (x - \bar{x})^2 I(x, y) dx dy}{\int I(x, y) dx dy} \quad (2.4.11)$$

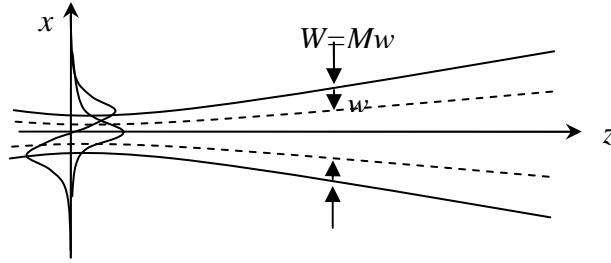


Fig. 2.10 O raio do feixe multimodo é M vezes maior que o modo fundamental, correspondendo a um factor de propagação M^2 .

O produto dos raios no campo próximo (cintura de feixe) e no campo longínquo (distância muito superior à distância de Rayleigh) é M^2 vezes maior do que para um feixe Gaussiano com o mesmo raio na cintura de feixe.

$$WW_0 \rightarrow M^2 \frac{\lambda z}{\pi} \quad (2.4.12)$$

O factor M^2 é chamado *factor de propagação* e é unitário para um modo Gaussiano TEM_{00} . Como a divergência do feixe é M^2 vezes maior do que para um feixe Gaussiano puro, um M^2 elevado reduz o poder de colimação e focabilidade de um feixe e é referido

como “parâmetro de qualidade “ do feixe. Em geral o M^2 depende da direcção: para um feixe simplesmente astigmático existem dois valores de M^2 segundo as direcções principais x e y .

Como o raio de um modo Hermi-Gauss de ordem n é $\sqrt{2n+1}$ vezes maior que o raio do modo fundamental (Carter 1980), um feixe com modos Hermite-Gauss (m,n) provenientes de uma cavidade estável, decorrelacionados e com distribuição de potências λ_{mn} , tem valores de M^2 , nas direcções (x,y) , dados por

$$\begin{aligned} M_x^2 &= \sum_{mn} \lambda_{mn} (2m+1) \\ M_y^2 &= \sum_{mn} \lambda_{mn} (2n+1). \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Simetria do perfil transversal de irradiância

Os perfis transversos de amplitude dos modos Hermite-Gauss (HG) têm simetria de reflexão em torno do eixo com a mesma paridade dos polinómios de Hermite associados

$$H_n(-x) = \begin{cases} H_n(x), & n \text{ par} \\ -H_n(x), & n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.4.14)$$

Para uma combinação incoerente de modos Hermite-Gauss não degenerados de uma cavidade estável, a irradiância é soma das irradiâncias de cada modo e é necessariamente par

$$I(\pm x, \pm y) = I(x, y) \quad (\sum \text{ incoer.}) \quad (2.4.15)$$

o que implica também que é centrosimétrica:

$$I(\mathbf{p}) = I(-\mathbf{p}) \quad (\sum \text{ incoer.}) \quad (2.4.16)$$

Numa combinação coerente de modos HG degenerados provenientes de uma cavidade estável numa configuração “não degenerada” ou degenerada confocal, para cada par de modos degenerados (i, j) ,

$$\begin{aligned} (m_i + n_i) &= (m_j + n_j) && \text{(cavidade não degenerada)} \\ (m_i + n_i) - (m_j + n_j) &= \text{par} && \text{(cavidade confocal).} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Estas condições equivalem a dizer que a soma de índices tem a mesma paridade. Como os perfis modais têm simetria de inversão com a mesma paridade da soma de índices,

$$HG_{nm}(-\mathbf{p}) = \begin{cases} HG_{nm}(\mathbf{p}), & (m+n) \text{ par} \\ -HG_{nm}(\mathbf{p}) & (m+n) \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (2.4.18)$$

a mesma paridade das somas de índices implica a mesma paridade de inversão. Como a soma de duas funções com a mesma paridade, preserva a paridade, qualquer combinação coerente de modos degenerados ou é par ou é ímpar por inversão e por conseguinte a sua irradiância é centrosimétrica:

$$I(\mathbf{p}) = I(-\mathbf{p}) \quad (\sum \text{ coer.}) \quad (2.4.19)$$

No entanto, como a paridade dos índices transversos isolados é arbitrária (apenas a soma deve ter paridade comum), a simetria de reflexão tem paridade arbitrária e por isso a paridade por reflexão da combinação coerente não está garantida (embora possa existir num sistema de coordenadas rodado (x', y')).

Resumindo, o perfil de irradiância de um feixe multimodo Hermite-Gauss proveniente de uma cavidade de espelhos esféricos estável numa configuração não degenerada ou degenerada confocal, é centro-simétrico. A ausência de eixos de simetria implica a presença de modos transversos degenerados que se adicionam coerentemente (ver fig. 2.11).

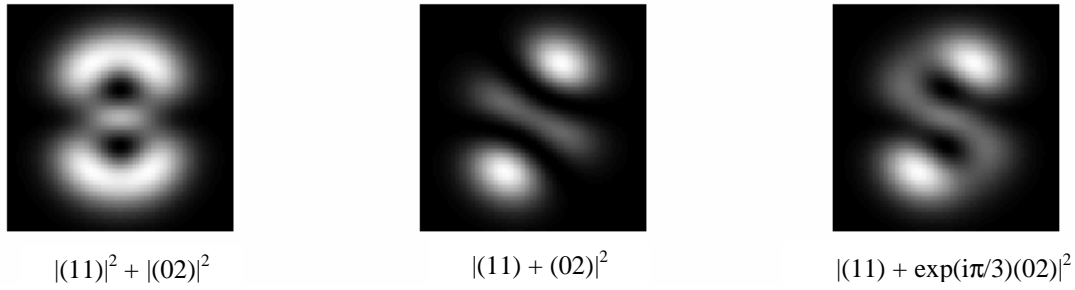


Fig. 2.11 Intensidade transversa da mistura dos modos HG (11) e (02):

(a) incoerente; (b) em fase; (c) desfasados $\pi/3$.

2.5 Conclusão

- Uma cavidade passiva de espelhos esféricos, numa configuração estável e com uma perturbação rectangular da simetria da cavidade, suporta modos longitudinal-transversos Hermite-Gauss TEM_{mnp} . Os modos transversos têm perfis mutuamente ortogonais em potência e um espectro longitudinal desviado $C(m+n)$ em relação ao modo transverso fundamental Gaussiano TEM_{00p} , sendo C função dos parâmetros g da cavidade.
- Um laser com meio activo com alargamento não homogéneo pode suportar vários modos logitudinal-transversos, cujas frequências cabem dentro da gama de frequências para a qual as perdas modais são inferiores ao ganho não saturado, resultando num feixe multimodo.
- A adição coerente de modos transversos degenerados em frequência produz modos transversos híbridos. Os modos Hermite-Gauss híbridos podem ter frentes de onda não esféricas e produzir padrões de irradiância sem eixos de simetria.
- Um feixe numa cavidade estável de espelhos esféricos tem um perfil transverso de irradiância estacionário (a menos de um factor de escala). O produto dos raios de feixe no campo próximo e distante é M^2 maior que o mesmo produto para o modo TEM_{00} , sendo M é a razão entre o raio do feixe e o raio do modo fundamental.

Capítulo 3

Coerência de feixes laser

A análise modal de um feixe laser pode ser feita a partir de medidas de coerência (cf. cap. 4). Revemos a teoria da representação coerente de um campo com coerência arbitrária, que conduz, para um feixe laser, a uma equação integral de Fredholm cujo kernel é a intensidade mútua e cujas soluções são modos espacialmente coerentes do feixe. Esclarecemos a relação existente entre modos coerentes de feixe e modos de cavidade (cf. cap. 2). Finalmente revemos o conceito de coerência espacial numa base arbitrária que pode ser aplicado ao problema da análise transversa de um feixe laser (cf. cap. 6).

Plano do capítulo

- 3.1 Introdução
- 3.2 Coerência mútua dum feixe multimodo
 - 3.2.1 Modelo do feixe
 - 3.2.2 Coerência mútua
- 3.3 Coerência espacial numa base arbitrária
 - 3.3.1 Matriz intensidade mútua
 - 3.3.2 Interferência bimodal
- 3.4 Inversão de coerência espacial
 - 3.4.1 Resolução da equação de Fredholm
 - 3.4.2 Problema da fase e separabilidade de coordenadas
- 3.5 Conclusão

3.1 Introdução

No capítulo 2, *Modos laser*, vimos que um feixe multimodo de uma cavidade de espelhos esféricos estável é, em geral, uma sobreposição de modos longitudinal-transversos de cavidade sendo os perfis dos modos transversos mutuamente ortogonais em potência e sendo o espectro de frequências longitudinais de cada modo transverso distinto ou degenerado. Neste capítulo aplicamos as definições usuais de coerência mútua no domínio espaço-temporal (correlação de segunda ordem dum campo estacionário entre dois pontos no plano transversal e entre dois instantes) a um feixe multimodo. Excluiremos na nossa análise lasers pulsados; assim assumiremos que não existe *mode locking* entre modos longitudinais.

A desconexão entre modos e a ortogonalidade em potência dos perfis modais transversos são as propriedades chave para a análise de coerência espacial. Geralmente modos espaciais de ordem diferente espectros longitudinais distintos, estando por isso desconexados. Contudo, a sobreposição de modos espaciais degenerados em frequência produz modos híbridos. Tais modos têm um papel importante na análise de coerência espacial que até agora não foi considerado na literatura.

Em primeiro lugar, modos híbridos são mutuamente ortogonais em potência e são também mutuamente desconexados. Assim, a análise de coerência espacial conduz em geral a modos híbridos e não a modos elementares da cavidade. Em segundo lugar, a presença de modos híbridos impõe propriedades de simetria do campo que impedem a separabilidade de coordenadas espaciais, tornando o problema de análise de coerência espacial bi-dimensional, ou seja irreduzível a uma análise unidimensional dupla. Finalmente, sendo as frentes de onda de modos híbridos não esféricas, não é possível abstrair um factor de onda esférica comum num feixe multimodo e, conseqüentemente, a função de coerência espacial é de valores complexos, mesmo sendo os perfis modais de valores reais.

A coerência espacial dum feixe quase quase-monocromático é dada pela intensidade mútua (correlação espacial instantânea). Mostramos que o para o modelo de feixe multimodo considerado a intensidade mútua admite uma decomposição espectral em

termos dos modos espaciais híbridos. Tais modos, espacialmente coerentes, obedecem a uma equação de valores próprios, que pode ser invertida para análise modal transversa.

Discutimos algumas dificuldades de princípio na medição da função de intensidade mútua e propomos a generalização dessa grandeza a uma base de descrição do campo arbitrária. Substituímos assim o conceito de correlação de campo entre dois pontos espaciais pelo conceito mais geral de correlação entre duas componentes “modais”. A teoria apresentada é uma sistematização da teoria que aparece na literatura de forma fragmentária e numa contexto distinto da análise modal que aqui nos interessa.

3.2 Coerência mútua dum feixe multimodo

3.2.1 Modelo do feixe

Modos híbridos

O campo do feixe laser proveniente de uma cavidade de espelhos esféricos estável será uma combinação linear de modos longitudinal-transversos, caracterizados pelos índices transversos (m, n) e índice longitudinal p . Tais modos oscilam com frequências ω_{mnp} , que, como vimos, podem ser coincidentes para diferentes modos degenerados em frequência (cap. 2). Numa cavidade real, imperfeita, é difícil prever se a degenerescência vai ser quebrada ou mantida. Sem perda de generalidade, admitiremos que possam ocorrer modos efectivamente degenerados que se adicionam de forma coerente, formando *modos híbridos* (Tamm 1988).

Um modo transverso híbrido, com índice k e perfil espacial $\Phi_k(\mathbf{r})$, será uma combinação coerente (oscilando em fase) de modos transversos da cavidade ϕ_{mn} ocorrendo no feixe com perfil espacial

$$\Phi_k(\mathbf{r}) \equiv \sum_{m,n} c_{kmn} \phi_{mn}(\mathbf{r}) \quad (3.1.1)$$

onde c_{kmn} são constantes complexas¹. Assumindo que os modos da cavidade ϕ_{mn} são ortonormados,

$$\int d\mathbf{p} \phi_{mn} \phi_{m'n'}^* = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (3.1.2)$$

a normalização dos perfis dos modos híbridos implica

$$\sum_{mn} |c_{kmn}|^2 = 1. \quad (3.1.3)$$

Modos híbridos distintos têm espectros longitudinais distintos. Segue-se que um modo de cavidade ϕ_m não pode pertencer simultaneamente a diferentes modos híbridos, caso contrário não teria um espectro definido. Dito doutra maneira, as componentes c_{kmn} devem satisfazer

$$c_{kmn} c_{k'mn}^* = |c_{kmn}|^2 \delta_{kk'}. \quad (3.1.4)$$

Das relações (3.1.1)-(3.1.4) concluímos que os modos híbridos são ortonormados

$$\int d\mathbf{p} \Phi_k \Phi_{k'}^* = \delta_k \delta_{k'}. \quad (3.1.5)$$

O campo do feixe multimodo será expresso como uma mistura de modos híbridos

$$E(\mathbf{p}, t) = \sum_k F_k(t) \Phi_k(\mathbf{p}), \quad (3.1.6)$$

cada um com uma dependência temporal associada ao espectro longitudinal com frequências ω_{kp} , amplitudes espectrais a_{kp} e fases θ_{kp} :

$$F_k(t) = \sum_p a_{kp} \exp[i\theta_{kp}(t)] \exp(i\omega_{kp}t). \quad (3.1.7)$$

¹ Se um modo da cavidade não estiver degenerado, coincide com o seu híbrido.

No modelo da expressão acima está implícito que as amplitudes modais são constantes enquanto as fases aleatórias traduzem a largura de linha modal, uma suposição correntemente aceite para descrever um modo laser (Yariv 1997).

Correlação entre modos

De (3.1.7) a correlação temporal entre dois modos transversos híbridos k é dada por

$$\overline{F_k(t) F_{k'}^*(t+\tau)} = \sum_{p,p'} a_{kp} a_{k'p'}^* \overline{\exp\{i[\theta_{kp}(t) - \theta_{k'p'}(t+\tau)]\}} \overline{\exp[i(\omega_{kp} - \omega_{k'p'})t]} \exp(-i\omega_{k'p'}\tau) \quad (3.1.8)$$

Como os modos longitudinal-transversos (híbridos) (k, p) oscilam com frequência distintas

$$\overline{\exp[i(\omega_{kp} - \omega_{k'p'})t]} = \delta_{kk'} \delta_{pp'}, \quad (3.1.9)$$

Além disso, assumindo que auto-correlação dos modos é estacionária

$$\overline{\exp\{i[\theta_{kp}(t) - \theta_{kp}(t+\tau)]\}} = \overline{\exp[i\Delta\theta_{kp}(\tau)]} \equiv \gamma_{kp}(\tau). \quad (3.1.10)$$

Usando as duas equações anteriores, a correlação intermodal (3.1.8) reduz-se a

$$\overline{F_k(t) F_{k'}^*(t+\tau)} = \delta_{kk'} \sum_p |a_{kp}|^2 \gamma_{kp}(\tau) \exp(-i\omega_{kp}\tau) \quad (3.1.11)$$

O resultado (3.1.11) exprime o seguinte: os modos híbridos estão mutuamente descorrelacionados; a autocorrelação dum modo híbrido é a soma das autocorrelações dos modos longitudinais que o compõem.

3.2.2 Coerência mútua

As propriedades de coerência espacial e temporal da radiação caracterizam a capacidade de haver interferência entre o campo em dois pontos espaciais ou temporais distintos. Em particular a coerência de segunda ordem² pode ser quantificada através da autocorrelação de dois pontos espacio-temporais do campo, (\mathbf{r}, t) e $(\mathbf{r}', t + \tau)$ ou função de *coerência mútua* (Born and Wolf 1980)

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \equiv \overline{E(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}', t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}', t + \tau) dt. \quad (3.1.12)$$

Aplicando esta definição ao modelo de feixe multimodo apresentado na secção anterior, expresso por (3.1.6) e (3.1.11), a coerência mútua entre dois pontos do plano transversal é

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}', \tau) = \sum_k \Phi_k(\boldsymbol{\rho}) \Phi_k^*(\boldsymbol{\rho}') \sum_p |a_{kp}|^2 \gamma_{kp}(\tau) \exp(-i\omega_{kp}\tau). \quad (3.1.13)$$

Relembramos que Φ_k designa um modo transversal da cavidade ou, em geral, um modo híbrido: combinação coerente de modos degenerados. O somatório é a soma das autocorrelações dos modos longitudinais associados, com espectro de amplitudes a_{kp} associadas às frequências centrais ω_{kp} . $\gamma_{kp}(\tau)$ traduz a coerência temporal associada à largura finita de linha de cada modo.

Coerência temporal

A interferência, por divisão de amplitude, do campo, assumido estacionário, com uma réplica do mesmo mas atrasada de um tempo τ , resulta numa intensidade

$$\begin{aligned} I &= \overline{|E(\boldsymbol{\rho}, t) + E(\boldsymbol{\rho}, t + \tau)|^2} \\ &= I(\boldsymbol{\rho}) + I(\boldsymbol{\rho}) + 2 \operatorname{Re} \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \tau) \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

² Alguns autores chamam a esta correlação cruzada entre valores de campo correlação de primeira ordem. Seguimos antes a convenção adoptada por Wolf

onde $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \tau)$ é a *função de coerência temporal* ou autocorrelação de segunda ordem do campo. Da expressão (3.1.13) resulta

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \tau) = \sum_k \left| \Phi_k(\mathbf{p}) \right|^2 \sum_p \left| a_{kp} \right|^2 \gamma_{kp}(\tau) \exp(-i\omega_{kp}\tau). \quad (3.1.15)$$

A transformada de Fourier inversa da expressão acima dá a densidade espectral do feixe, em acordo com o *teorema de Wiener-Khinchin*:

$$\int \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = \sum_k \left| \Phi_k(\mathbf{p}) \right|^2 \sum_p \left| a_{kp} \right|^2 \widetilde{\gamma_{kp}}(\omega - \omega_{kp}), \quad (3.1.16)$$

onde $\widetilde{\gamma_{kp}}(\omega)$ designa o perfil de linha normalizado do modo (k, p) .

A medição da coerência temporal com um interferómetro de Michelson e a aplicação do Teorema de Wiener-Kinchin formam a base da espectroscopia de Fourier, que é a técnica standard para medição de coerência temporal de feixes.

Coerência espacial

A análise de coerência espacial faz-se com um interferómetro de divisão de frente de onda, na forma mais simples um interferómetro de Young (Thompson and Wolf 1957), que regista o padrão de franjas de interferência entre dois pontos do campo. Estas franjas tanto podem resultar da variação da diferença de caminhos ópticos entre as duas aberturas com a variação do ponto de observação no alvo (franjas espaciais) ou dum desfasamento relativo variável δ imposto nas aberturas observando um ponto fixo do alvo (franjas temporais):

$$\begin{aligned} I &= \overline{\left| E(\mathbf{p}, t) + E(\mathbf{p}', t) \exp^{i\delta} \right|^2} \\ &= I(\mathbf{p}) + I(\mathbf{p}') + 2 \operatorname{Re} \Gamma \left(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \tau = \frac{\delta}{\omega_0} \right) \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Em todo o caso, o que importa salientar é que a análise de coerência espacial pode ser

separada da análise de coerência temporal, se impusermos a condição de tempo de atraso τ ser inferior ao tempo de coerência, ie

$$\delta \ll 2\pi \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (3.1.18)$$

Diz-se que, nesta condição e quando a largura espectral é estreita, estamos perante uma fonte *quase monocromática* (Goodman 2000), e então o módulo da função de coerência não varia com aquele atraso e podendo escrever-se

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \tau) = J(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \exp(i\omega_0 \tau)$$

onde J é a função *intensidade mútua*

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}', 0). \quad (3.1.19)$$

Nestas condições a equação de interferência pode escrever-se

$$I = I(\mathbf{p}) + I(\mathbf{p}') + 2 |J(\mathbf{p}, \mathbf{p}')| \cos(\text{Arg}[J] + \delta) \quad (3.1.20)$$

Do modelo de coerência mútua de um feixe multimodo deduzido na secção anterior

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_k \Phi_k(\mathbf{p}) \Phi_k^*(\mathbf{p}') \sum_p |a_{kp}|^2. \quad (3.1.21)$$

O somatório nos modos longitudinais p representa as potências totais dos modos transversos k

$$\sum_p |a_{kp}|^2 \equiv \lambda_k \quad (3.1.22)$$

e a expressão da intensidade mútua escreve-se sucintamente

$$J(\rho, \rho') = \sum_k \lambda_k \Phi_k(\rho) \Phi_k^*(\rho'). \quad (3.1.23)$$

A expansão acima pode ser vista como a soma das intensidades mútuas para cada modo híbrido

$$J(\rho, \rho') = \sum_k J_k(\rho, \rho') \quad (3.1.24)$$

$$J_k(\rho, \rho') \equiv \lambda_k \Phi_k(\rho) \Phi_k^*(\rho').$$

Equação de Fredholm da intensidade mútua

O problema que se põe agora é o de inverter as equações anteriores ie estabelecer uma relação que permita calcular os modos transversos do campo a partir do conhecimento da intensidade mútua. Multiplicando a expansão (3.1.23) por um modo particular Φ e integrando no plano transversal, resulta, da ortogonalidade entre modos, a seguinte equação integral de Fredholm

$$\iint d\rho' J(\rho, \rho') \Phi(\rho') = \lambda \Phi(\rho). \quad (3.1.25)$$

Esta equação é uma equação de valores próprios, que, se resolvida, permitiria³ encontrar os pesos e funções modais a partir da intensidade mútua.

Representação em modos coerentes

As relações (3.1.23) e (3.1.25) foram deduzidas a partir dum modelo simples que admitia ortogonalidade e descorrelação entre modos⁴ (eventualmente híbridos) da cavidade geradora do feixe. No entanto, independentemente das suposições feitas para o feixe, é sempre possível escrever uma equação integral da forma (3.1.25) com Kernel igual à

³ Dizemos “permitiria” porque nunca foi realizado experimentalmente sem suposições adicionais (cf. cap. 4).

⁴ Em teoria de probabilidades existe um problema análogo que consiste em determinar a expansão de um sinal aleatório em termos de componentes ortogonais com coeficientes descorrelacionados; a teoria que trata este problema chama-se expansão de Karhunen Loève e o resultado a que chega é formalmente idêntico.

intensidade mútua. Se esse Kernel, Hermítico por definição, obedecer a outras condições muito gerais (continuidade, quadrado somável, semi-definido positivo), pela aplicação do conhecido teorema de Mercer, admite uma expansão espectral da forma (3.1.23) (*expansão de Mercer*), onde os coeficientes e funções são valores próprios (não negativos) e funções próprias (ortogonais) da equação integral (3.1.25) associada.

Wolf (Mandel and Wolf 1995) aplica o teorema de Mercer à função densidade espectral cruzada (transformada de Fourier da função de coerência mútua) para concluir que, se aquela função obedecer às condições matemáticas referidas, admite uma expansão espectral semelhante. Esse resultado é desde então conhecido como *expansão em modos coerentes*. A formulação expressa pelas equações (3.1.23) e (3.1.25) pode ser vista como uma aplicação (Turunen, Tervonen et al. 1989) ao domínio espaço-tempo e em condições de quase-monocromaticidade da teoria mais geral da expansão em modos coerentes formulada no espaço-frequência e válida para fontes não monocromáticas.

3.3 Coerência espacial numa base arbitrária

No contexto da análise numérica de propagação parcialmente coerente em telescópios *quasi*-ópticos, (Withington and Murphy 1998) de mostraram a vantagem de expandir uma dada função de coerência espacial numa matriz de correlação discreta entre modos arbitrários facilmente propagáveis no sistema (no caso, Hermite-Gauss). Essa abordagem permitia calcular a propagação da coerência através do sistema por métodos matriciais. Além disso a diagonalização da matriz de coerência permitia calcular os modos coerentes do sistema.

Aqui, no contexto da análise de feixes laser multimodo, retomamos a mesma ideia mas numa perspectiva e com um formalismo distintos. Iremos supor que podemos medir (em vez de calcular) uma matriz de coerência através da interferência entre componentes do campo numa base arbitrária. Finalmente demonstramos que a equação de valores próprios da matriz de coerência é a generalização da equação de Fredholm (apresentada na secção anterior) para a coerência espacial. A teoria apresentada é usada no capítulo 6 como suporte de um método de interferometria holográfica de análise modal transversa.

3.3.1 Matriz intensidade mútua

O campo do feixe multimodo pode ser expresso numa base arbitrária ortonormada de funções Ψ , a que chamaremos "*base de medida*". Usaremos a notação *bracket* para representar a projecção de uma função noutra

$$\langle f | g \rangle \equiv \int f^*(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (3.3.1)$$

No caso em que a base de medida consiste nas posições espaciais $|\mathbf{p}\rangle$

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (3.3.2)$$

a intensidade mútua entre dois pontos do plano transversal

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \overline{E(\mathbf{p}) E^*(\mathbf{p}')}, \quad (3.3.3)$$

pode escrever-se da seguinte forma

$$\langle \mathbf{p} | J | \mathbf{p}' \rangle = \overline{\langle \mathbf{p} | E \rangle} \langle E | \mathbf{p}' \rangle, \quad (3.3.4)$$

onde J é agora visto como um operador. Multiplicando ambos os membros da equação anterior por $\langle \Psi_a | \mathbf{p} \rangle$ à esquerda e por $\langle \mathbf{p}' | \Psi_b \rangle$ à direita, e usando a completude da base das posições

$$\iint d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = 1, \quad (3.3.5)$$

obtem-se a matriz de intensidade mútua entre elementos da base Ψ

$$\langle \Psi_a | J | \Psi_b \rangle = \overline{\langle \Psi_a | E \rangle} \langle E | \Psi_b \rangle. \quad (3.3.6)$$

Abstraindo dos elementos da base, o operador de intensidade mútua pode ainda ser escrito na forma de um projector médio sobre o campo:

$$J = \overline{|E\rangle\langle E|}. \quad (3.3.7)$$

Generalização da equação de Fredholm da correlação do campo

De acordo com (3.3.7) a expansão em modos coerentes da intensidade mútua (3.1.23) pode escrever-se como

$$J = \sum_k \lambda_k |\Phi_k\rangle\langle\Phi_k|. \quad (3.3.8)$$

correspondendo, na base Ψ , à matriz

$$\langle\Psi_a|J|\Psi_b\rangle = \sum_k \lambda_k \langle\Psi_a|\Phi_k\rangle\langle\Phi_k|\Psi_b\rangle. \quad (3.3.9)$$

Multiplicando à direita ambos membros da equação acima por $\langle\Psi_b|\Phi_l\rangle$ e somando para todos os valores de b

$$\sum_b \langle\Psi_a|J|\Psi_b\rangle\langle\Psi_b|\Phi_l\rangle = \sum_b \sum_k \lambda_k \langle\Psi_a|\Phi_k\rangle\langle\Phi_k|\Psi_b\rangle\langle\Psi_b|\Phi_l\rangle \quad (3.3.10)$$

Como a base de medida deve ser completa

$$\sum_b |\Psi_b\rangle\langle\Psi_b| = 1 \quad (3.3.11)$$

e supondo a ortonormalidade das funções modais Φ do feixe

$$\langle\Phi_k|\Phi_l\rangle = \delta_{kl} \quad (3.3.12)$$

obtemos o equivalente da equação integral de Fredholm na base arbitrária de medida

$$\sum_b \langle \Psi_a | J | \Psi_b \rangle \langle \Psi_b | \Phi_l \rangle = \lambda_l \langle \Psi_a | \Phi_l \rangle. \quad (3.3.13)$$

Se os elementos da matriz de correlação forem conhecidos, a solução da equação acima dará como valores próprios os pesos modais e como vectores próprios as projecções da base modal na base de medida. Usando os vectores próprios assim encontrados podemos reconstituir os perfis espaciais dos modos coerentes do feixe (híbridos da cavidade) através da relação

$$\langle \rho | \Phi_l \rangle = \sum_a \langle \Psi_a | \Phi_l \rangle \langle \rho | \Psi_a \rangle. \quad (3.3.14)$$

3.3.2 Interferência bimodal

Consideremos a interferência entre duas componentes do campo k e l , com desfasamento δ , análoga à interferência entre dois pontos

$$I_{kl} = \left| \langle \Psi_k | E \rangle + \exp^{i\delta} \langle \Psi_l | E \rangle \right|^2 \quad (3.3.15)$$

ou

$$I_{kl} = \overline{\langle \Psi_k | E \rangle} \langle E | \Psi_k \rangle + \overline{\langle \Psi_l | E \rangle} \langle E | \Psi_l \rangle + 2 \operatorname{Re} \left\{ \overline{\langle \Psi_k | E \rangle} \langle E | \Psi_l \rangle e^{i\delta} \right\} \quad (3.3.16)$$

Usando a forma geral do operador de intensidade mútua (3.3.7), a equação anterior pode ser expressa em termos da correspondente matriz

$$I_{kl} = \langle \Psi_k | J | \Psi_k \rangle + \langle \Psi_l | J | \Psi_l \rangle + 2 \operatorname{Re} \left\{ \langle \Psi_k | J | \Psi_l \rangle e^{i\delta} \right\}. \quad (3.3.17)$$

A medição experimental da interferência bimodal expressa por (3.3.17) e a consequente da medição da matriz $(\Psi_k | J | \Psi_l)$ é possível por meios holográficos e será o assunto do capítulo 6, dedicado à análise transversa de feixes.

3.4 Inversão de coerência espacial

Nesta secção abordamos o problema da análise modal transversa a partir de medidas de coerência do ponto de vista de princípio. As técnicas associadas são revistas no cap. 4 *Análise de feixes laser*. Faremos uso da teoria de coerência espacial no espaço das posições embora os argumentos se possam generalizar a qualquer base de representação do campo transversal (cf. sec. anterior).

3.4.1 Resolução da equação de Fredholm

A equação de Fredholm para intensidade mútua (3.1.25), que por comodidade reescrevemos

$$\iint d\mathbf{p}' J(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Phi(\mathbf{p}') = \lambda \Phi(\mathbf{p}), \quad (3.3.18)$$

pode ser utilizada, supondo medida a intensidade mútua transversa J , para determinar os modos espacialmente coerentes Φ e as respectivas potências λ . Se os perfis modais forem conhecidos a priori, poderemos calcular o integral em (3.3.18) para determinar as respectivas potências modais. Se não conhecermos os perfis modais, aquela equação deve ser encarada como um problema de valores próprios, permitindo determinar simultaneamente as funções e pesos modais.

Na prática a intensidade mútua terá de ser amostrada numa grelha finita de pontos, e a equação (3.3.18) traduz-se numa equação matricial de valores próprios, que pode ser resolvida pelo método da decomposição em valores singulares (SVD). A figura 3.1 ilustra a solução numérica SVD para uma matriz de coerência simulada para uma combinação dos primeiros três modos Hermite-Gauss, numa grelha unidimensional de 30 pontos. Esta simulação é apresentada aqui para ilustrar a teoria mas também foi usada para testar a fiabilidade da inversão de coerência em condições não ideais e.g. a sensibilidade ao ruído nas medições de correlação.

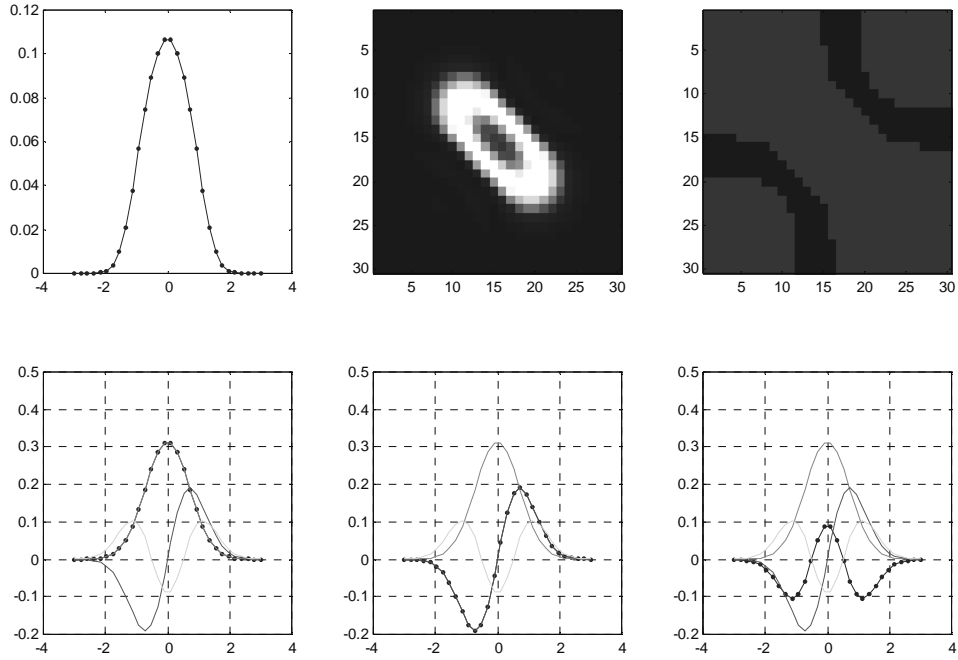


Fig. 3.1 Inversão numérica da intensidade mútua J dum campo simulado como uma composição incoerente de modos Hermite-Gauss TEM_{00} , TEM_{10} e TEM_{20} . O campo é amostrado numa grelha de unidimensional de 30 pontos. Em cima (da esquerda para a direita): perfil de intensidade (diagonal da J); magnitude J ; sinal de J . Em baixo: perfis modais da solução (pontos) comparados com os perfis teóricos (traço contínuo).

Observemos que a simulação que fizemos ilustra um caso particularmente simples da teoria, nomeadamente um campo unidimensional com perfis modais reais. Certamente que esta situação interessa frequentemente e nomeadamente na cintura dum feixe laser com modos Hermite-Gauss descorrelacionados. A separabilidade de coordenadas e o carácter real da intensidade mútua traduz-se, efectivamente, numa redução drástica do número de medidas de J e na não necessidade de medir a sua fase (o sinal pode ser inferido por continuidade). Estas suposições foram de facto tomadas no único trabalho experimental de análise modal baseada unicamente na inversão de coerência até agora publicado (Warnky 2000) (ver cap. 4).

Seguidamente, argumentamos que, na presença de modos espaciais degenerados, a separabilidade de coordenadas nem sempre é possível e a intensidade mútua pode ser uma

função de valores complexos. Nesse caso, será necessário efectua medidas bidimensionais de intensidade mútua e medir a sua fase juntamente com a sua magnitude.

3.4.2 Problema da fase e separabilidade de coordenadas

Fase da intensidade mútua

Se os modos coerentes forem ondas esféricas com raio comum R , como acontece com modos Hermite-Gauss de uma cavidade estável, as funções modais transversas serão

$$\Phi_k(\mathbf{p}) = A_k(\mathbf{p}) \exp \left[i\pi \frac{|\mathbf{p}|^2}{\lambda R} \right] \quad (3.3.19)$$

onde $A_k(\mathbf{p})$ é a amplitude modal, real. Para um feixe multimodo, se tais modos estiverem descorrelacionados, e tiverem potências relativas λ_k , a intensidade mútua será então

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_k \lambda_k \Phi_k(\mathbf{p}) \Phi_k^*(\mathbf{p}') = \exp \left[i\pi \frac{|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}'|^2}{\lambda R} \right] \sum_k \lambda_k A_k(\mathbf{p}) A_k(\mathbf{p}'). \quad (3.3.20)$$

A intensidade mútua dada pela última expressão é afectada por um termos quadrático complexo que contem informação sobre a curvatura das frentes de onda do feixe. No entanto, na cintura de feixe, $R = \infty$ e o termo exponencial é unitário tornando a intensidade mútua de valores reais. Nesse caso, a fase de J tem apenas dois valores: 0 ($J > 0$) e π ($J < 0$). O sinal de J pode então ser inferido por continuidade nos seus zeros (anulação de franjas de interferência), como é ilustrado na fig. 3.2.

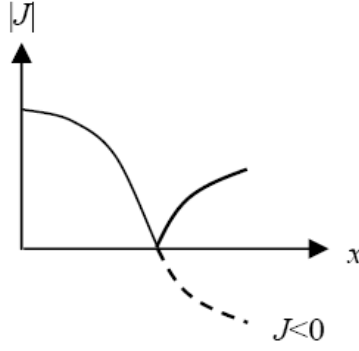


Fig. 3.2 Para J real, o seu sinal pode ser inferido, medindo apenas a magnitude de J e impondo a continuidade na(s) derivada(s) nos pontos onde $J=0$.

Consideremos agora o caso mais geral em que há modos transversos degenerados em frequência, formando modos híbridos que são combinações coerentes dos modos de cavidade (ver cap. 2, sec. 2.4):

$$\Phi_k(\mathbf{\rho}) = \sum_m c_{km} A_m(\mathbf{\rho}) \exp \left[i\pi \frac{|\mathbf{\rho}|^2}{\lambda R} \right], \quad (3.3.21)$$

onde os coeficientes c_{km} constantes complexas. A intensidade mutual correspondente é

$$J(\mathbf{\rho}, \mathbf{\rho}') = \exp \left[i\pi \frac{|\mathbf{\rho}|^2 - |\mathbf{\rho}'|^2}{\lambda R} \right] \sum_k \lambda_k \left[\sum_{m'} \sum_m c_{km} c_{km'}^* A_m(\mathbf{\rho}) A_{m'}(\mathbf{\rho}') \right], \quad (3.3.22)$$

que é, em geral, de valor complexo, mesmo na cintura de feixe ($R = \infty$) e para perfis modais $A_m(\mathbf{\rho})$ de valor real.

Separabilidade na análise de coerência espacial

Suponhamos que os modos transversos da fonte laser são separáveis (como acontece com modos Hermite-Gauss)⁵

⁵ Para modos Laguerre-Gauss, x e y devem ser entendidos como sendo as coordenadas radial e azimutal, respectivamente.

$$\phi_n(x, y) = \phi_n^x(x) \phi_n^y(y). \quad (3.3.23)$$

Se tais modos forem descorrelacionados e ortogonais, serão os modos espacialmente coerentes do feixe, que por conseguinte serão separáveis. Neste caso, a análise bidimensional de coerência espacial reduz-se a uma dupla análise unidimensional nas direcções x e y . De facto, fixando uma das coordenadas, a equação de Fredholm (3.3.18) reduz-se a uma equação integral na correspondente coordenada ortogonal:

$$\begin{aligned} \int J(x, y_0; x', y_0) \phi_k^x(x') dx' &= \lambda_k [\phi_k^{y*}(y_0) \phi_k^y(y_0)] \times \phi_k^x(x) \\ \int J(x_0, y, x_0, y') \phi_k^y(y') dy' &= \lambda_k [\phi_k^{x*}(x_0) \phi_k^x(x_0)] \times \phi_k^y(y). \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

O par de equações acima, em conjunto, permite determinar os modos (funções próprias) e pesos modais (valores próprios) a partir de medidas da intensidade mútua unidimensionais.

Contudo a situação mais geral será a de um feixe que inclua modos coerentes que são combinações lineares dos modos de cavidade, designadamente modos híbridos em cavidades esféricas como já vimos (eq.(3.3.21):

$$\Phi_k = \sum_k c_{kn} \phi_n. \quad (3.3.25)$$

Como uma combinação linear de funções separáveis (linearmente independentes) não é em geral separável⁶, conclui-se que os modos coerentes do feixe também não o são i.e.

$$\Phi_k(x, y) \neq \Phi_k^x(x) \Phi_k^y(y). \quad (3.3.26)$$

Neste caso não é possível separar a equação de Fredholm em duas equações unidimensionais acopladas, como em (3.3.24); por outras palavras a análise de coerência é irreduzivelmente bidimensional.

⁶ Podem ser separáveis num outro sistema de coordenadas (e.g. o modo donut $HG_{01} + i HG_{10}$ é separável nas coordenadas cilíndricas), mas não há, em geral, um sistema de coordenadas separável para todos os modos coerentes do feixe.

3.5 Conclusão

- Assumimos um modelo genérico dum feixe laser multimodo (e.g. cavidade estável de espelhos esféricos) como uma sobreposição de modos híbridos compostos por modos transversos de cavidade ortogonais e degenerados em frequência. Os modos híbridos são mutuamente descorrelacionados e ortogonais.
- Em condições de quase-monocromaticidade do feixe, a coerência espacial no plano transversal pode exprimir-se em termos da intensidade mútua. Os modos híbridos do modelo são espacialmente coerentes, sendo os seus perfis espaciais soluções próprias duma equação integral de Fredholm cujo Kernel é a intensidade mútua.
- Revemos e sistematizamos o conceito de correlação espacial do campo entre duas componentes numa base arbitrária de representação do campo. Esta noção conduz a uma matriz de correlação cuja equação de valores próprios é uma generalização da equação de Fredholm da intensidade mútua.
- A presença de modos híbridos, compostos por modos de cavidade com perfis de valores reais e separáveis nas coordenadas transversas, torna a intensidade mútua uma função de valor complexo e a análise de coerência não separável naquelas coordenadas.

Capítulo 4

Técnicas de análise de feixes laser

O presente capítulo visa enquadrar este trabalho no contexto do problema da análise de feixes laser e das técnicas experimentais associadas. A análise modal pode ser vista como um problema inversão de medidas de coerência. Após uma revisão crítica das técnicas de análise conhecidas e parâmetros de feixe associados, esboçamos os princípios das técnicas propostas.

Plano do capítulo

- 4.1 Introdução
- 4.2 Técnicas de análise espectral
 - 4.2.1 Comprimento de onda
 - 4.2.2 Largura de banda
 - 4.2.3 Espectro
- 4.3 Técnicas de análise espacial
 - 4.3.1 Qualidade de feixe
 - 4.3.2 Análise de frente de onda
 - 4.3.3 Análise modal transversa
- 4.4 Técnicas propostas
 - 4.4.1 Interferometria holográfica
 - 4.4.2 Difusão dinâmica de luz
- 4.5 Conclusão

4.1 Introdução

Como vimos no cap. 3 *Coerência de feixes laser*, a análise modal de feixes pode ser vista como um problema de inversão de coerência. Quando dizemos coerência, referimo-nos à correlação cruzada de segunda ordem de campos escalares, estacionários e quase-monocromáticos (lasers contínuos, polarizados e com largura de banda estreita).

No presente capítulo revemos as principais técnicas de análise modal de feixes e, em particular, as técnicas baseadas em medidas de coerência. A análise de feixes laser é uma área relativamente extensa (Hodgson and Weber 2005) e cingir-nos-emos às técnicas principais que foram testadas experimentalmente e de aplicação geral. Assim, excluimos simulações numéricas e técnicas espaciais usadas em viz. lasers de alta energia, lasers pulsados, lasers de elevada coerência, lasers com microcavidades.

Na secção 4.2 *Técnicas de análise espectral*, revemos as técnicas de medição do espectro de frequências emitido. A secção 4.3 *Técnicas de análise transversa* aborda a análise dos perfis espaciais transversos: irradiância, aberrações e modos espaciais. O capítulo termina com a secção 4.4 *Técnicas propostas*, onde discutimos algumas limitações das técnicas conhecidas e propomos duas novas técnicas, que serão detalhadas nos capítulos 6 e 7.

4.2 Técnicas de análise espectral

4.2.1 Comprimento de onda

Um laser é tipicamente uma fonte quase monocromática caracterizado em primeira aproximação pelo seu comprimento de onda central. Na maioria dos casos aquele é definido pela transição laser, previamente conhecida com precisão subnanométrica por técnicas espectrométricas baseados em redes de difracção. No entanto, nalguns lasers o comprimento de onda é variável (laser sintonizáveis) ou dependente da temperatura (ex.

lasers díodos); ou pode ser importante conhecer o comprimento de onda de operação com precisão superior.

Um dispositivo comum para medidas de comprimento de onda, com elevada precisão, é um interferômetro de Michelson de varrimento. Neste um dos espelhos é deslocado de uma distância conhecida e o número de franjas contado é igual ao número de meios comprimentos de onda. A precisão desta medida depende em primeiro lugar da precisão da medida de deslocamento e, por essa razão, um laser de referência, com comprimento de onda conhecido é utilizado. A precisão da medida nunca pode ser superior à do laser de referência, que em última instância (padrão de medida absoluto) terá de ser medido sem recurso a um laser de referência¹. A precisão última com que se pode medir o comprimento de onda corresponde à sua incerteza, ou à correspondente largura de banda da fonte.

4.2.2 Largura de banda

O interferômetro de Michelson é usado para medir a autocorrelação do campo, Γ , através da visibilidade das franjas de intensidade I , resultantes da interferência entre os feixes divididos, com intensidades I_1 e I_2 , com atraso relativo τ , através da relação bem conhecida

$$V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \Gamma(\tau). \quad (4.2.1)$$

De acordo com o teorema de Wiener-Kintchine, a densidade espectral $W(\omega)$ e a autocorrelação do campo formam um par de Fourier e por isso a largura de banda da fonte $\Delta\omega$ e o tempo de coerência da fonte $\Delta\tau$, definidos como (Born and Wolf 1980).

$$(\Delta\tau)^2 \equiv \frac{\int d\tau \tau^2 |\Gamma|^2}{\int d\tau |\Gamma|^2} \quad (4.2.2)$$

¹ Uma técnica que permite obter uma medida de frequência absoluta, chamada "pentes de frequências", mereceu o Nobel da Física em 2005.

$$(\Delta\omega)^2 \equiv \frac{\int d\omega (\omega - \bar{\omega})^2 |W(\omega)|^2}{\int d\omega |W(\omega)|^2}, \quad (4.2.3)$$

estão relacionadas pela relação de incerteza

$$\Delta\omega \Delta\tau \geq \frac{1}{2}, \quad (4.2.4)$$

verificando-se a igualdade para feixes com espectro Gaussiano.

A relação (4.2.4) indica que para discriminar um espectro com resolução de ~MHZ, é necessário um tempo de atraso pelo menos da ordem de ~1μs, correspondendo a uma diferenças de percurso entre os dois braços do interferómetro da ordem das centenas de metros.

A presença de vários modos transversos no feixe a analisar dificulta a análise de franjas, cuja visibilidade para o mesmo atraso entre dois feixes é variável no plano transversal ao feixe, uma vez que a função de coerência temporal é variável de ponto para ponto no plano transversal.

4.2.3 Espectro

Embora uma rede de difracção permita discriminar as frequências modais de lasers com cavidades muito pequenas, por exemplo lasers díodo (L~mm), na maioria dos lasers o poder de resolução espectral das redes de difracção é insuficiente.

Para uma análise espectral fina, a técnica usual é o interferómetro Fabry-Perot de varrimento (Fork, Herriott et al. 1964). Este é tipicamente uma cavidade esférica confocal ou plana com um espelho actuado por um piezoeléctrico e com uma banda espectral livre maior que a largura de banda a analisar (cavidade mais pequena que a cavidade laser). A alta reflectividade dos espelhos produz larguras de linha de transmissão típicas na gama MHz-GHz.

Uma lente de acoplamento modal é geralmente necessária para ajustar as frentes de onda do feixe a analisar às superfícies dos espelhos, evitando a excitação de modos

transversos superiores por um único modo transverso do feixe a analisar. A principal vantagem da configuração confocal é que estando os modos transversos do interferómetro degenerados em frequência (modos pares e ímpares alternadamente separados de $c/4L$) cada linha espectral observada corresponde a uma linha do sinal analisado.

A presença de vários modos transversos no feixe a analisar, com diferentes acoplamentos nos modos transversos do interferómetro dificulta a interpretação quantitativa do espectro, pelo que este tipo de interferómetro é particularmente útil para a análise de modos longitudinais de um feixe TEM_{00} .

4.3 Técnicas de análise espacial

A análise transversa de feixes pode ser vista como um problema de inversão de difracção. A extração das características do feixe (parâmetros de feixe, função de aberração, coeficientes modais) a partir de um interferograma é um problema cuja viabilidade depende da natureza do feixe (suposições feitas) e do compromisso entre processamento óptico e análise de interferência. Segue-se uma breve revisão das técnicas mais conhecidas ou relevantes para este projecto, agrupadas pela sua função.

4.3.1 Qualidade de feixe

A análise de momentos de um feixe consiste na medição dos momentos estatísticos do perfil de irradiância do feixe (centróide, variância, etc.) numa ou em ambas as direcções ortogonais transversas, num ou em vários planos transversos. O perfil do feixe é registado na totalidade (CCD) ou integrado por varrimento (*knife edge*).

A importância da análise de momentos reside na propriedade de que o segundo momento se propaga exactamente como se o feixe fosse Gaussiano, independentemente da sua coerência espacial, mas com uma divergência efectiva (uma em cada direcção transversa, se houver astigmatismo simples) que difere do factor M^2 em relação a um feixe Gaussiano puro (ver cap.2, sec. 2.4.3). O raio do feixe (dobro do desvio padrão) obedece a

$$W^2(z) = W_0^2 \left[1 + \left(M^2 \frac{\lambda}{\pi W_0^2} z \right)^2 \right] \quad (4.3.1)$$

Experimentalmente, a técnica M^2 consiste na medição da dimensão transversal do feixe percorrendo a zona focal, criada por uma lente, na direcção axial e no ajuste da expressão (4.3.1) (fig. 4.1).

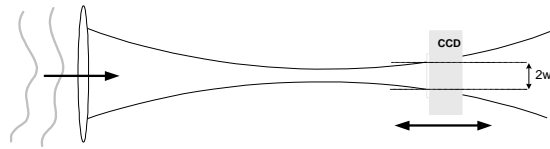


Fig. 4.1 Montagem para a medição da coerência espacial do feixe *laser* pela técnica M^2 .

O diâmetro do feixe é medido em função da posição no eixo óptico.

O factor M^2 é muitas vezes referido como parâmetro de *qualidade de feixe* uma vez que nos indica o afastamento deste de um feixe Gaussiano TM_{00} ($M^2=1$). No entanto será mais adequado chamar-lhe *factor de propagação*, uma vez que a "qualidade" depende da aplicação, já que nem sempre é a máxima capacidade de focagem que interessa.

Presentemente a medição de M^2 é a técnica padrão na análise espacial de feixes (Wright, Greve et al. 1992).

4.3.2 Análise de frentes de onda

Consiste na medida da função de aberração em relação a uma onda que se pretende esférica. Naturalmente pressupõe coerência espacial: fontes policromáticas distantes ou filtradas espacialmente; fontes laser com um só modo espacial. Há um conjunto de técnicas estabelecidas denominadas *sensores de frente de onda* (Geary 1995) usadas pela comunidade óptica tanto na análise de sistemas de lentes como em sistemas de correcção de feixes por óptica adaptativa.

Sensor de frentes de onda (Shack-)Hartmann

A técnica de Hartmann (Hartmann 1904), a frente de onda a analisar é segmentada por uma matriz de aberturas. Os feixes segmentados projectados num alvo apresentam desvios proporcionais à inclinação das frentes de onda nas aberturas respectivas. Na variante Shack-Hartmann (Shack and Platt 1971) as aberturas são substituídas por lentes, que produzem focos num plano focal, aumentando a eficiência na luminosa (fig. 4.2).

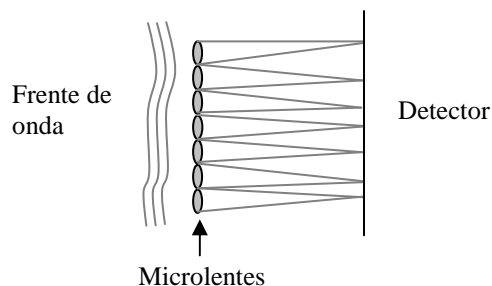


Fig. 4.2 Princípio de funcionamento de um sensor de frente de onda Shack-Hartmann.

Interferometria de desvio lateral (Lateral shear interferometry)

O feixe é dividido em duas réplicas desviadas lateralmente que interferem num alvo. O desvio das franjas de interferência é proporcional à derivada transversa da fase. A análise tem de ser feita em duas direcções ortogonais. O desvio lateral é feito tradicionalmente com uma placa de vidro (Murty 1964) ou com recurso a redes de Ronchi (Hariharan, Steel et al. 1974). Esta técnica foi recentemente alargada de modo a fazer interferir várias réplicas da onda a analisar por intermédio de uma rede de difracção dinâmica gerada com um modulador espacial (Velghe, Primot et al. 2005).

4.3.3 Análise modal transversa

Perfilometria de feixe

Consideremos um feixe composto por modos transversos ϕ_n escalados com raio do modo fundamental $w(z)$

$$E(\mathbf{p}, z, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n \left(\frac{\mathbf{p}}{w(z)} \right) \quad (4.3.2)$$

A irradiância transversa do feixe do feixe é

$$I(\mathbf{p}) \propto \sum_n \sum_{n'} \overline{c_n c_{n'}^*} \phi_n \left(\frac{\mathbf{p}}{w} \right) \phi_{n'}^* \left(\frac{\mathbf{p}}{w} \right) \quad (4.3.3)$$

(Cutolo, Esposito et al. 1992) propuseram um ajuste da irradiância observada a um modelo do tipo (4.3.3) por minimização do desvio quadrático, distinguindo dois casos extremos: incoerente, $\overline{c_n c_{n'}^*} = |c_n|^2 \delta_{nn'}$, e coerente $c_n = \text{const.}$. (Cutolo, Isernia et al. 1995) mediram a distribuição modal de um laser com Q-switching, considerando o modelo coerente. Aqueles autores reconheceram, a partir de simulações numéricas, que as ambiguidades na reconstrução da amplitude e fase dos coeficientes podia ser diminuída com medidas em dois planos: campo próximo e campo distante.

O inconveniente principal de métodos de análise modal baseados em perfis transversos de irradiância é que requerem o conhecimento *a priori dos modos analisados*: perfis modais; parâmetro de escala (raio do modo fundamental); correlações intermodais. Existem diferentes composições modais que têm o mesmo padrão de irradiância em qualquer plano transversal (Dragoman 2003): um exemplo simples deste tipo de ambiguidade é a combinação coerente de dois modos Hermite-Gaussianos desfazados $\pi/2$ com a mesma amplitude: tal combinação tem uma irradiância indistinta da mistura incoerente dos mesmos modos, em todos os planos transversos. Finalmente, uma dificuldade adicional é a estabilidade destes métodos: sabe-se que a combinação de vários modos com pesos sucessivamente decrescentes, tende a produzir um feixe com irradiância

quase Gaussiana semelhante a um feixe TEM_{00} mas com parâmetro de escala efectivo maior - feixe “Gaussiano não Gaussiano”, fig. 4.3; por outras palavras qualquer método de inversão de irradiância é inerentemente mal condicionado, especialmente na presença de ruído e não linearidades nas medições.

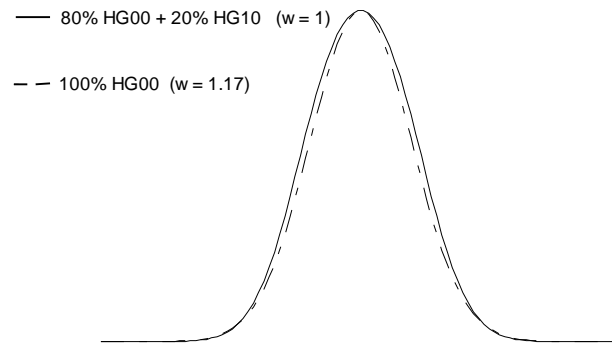


Fig. 4.3 Mistura de modos HG_{00} e HG_{10} semelhante a um modo HG_{00} de raio maior.

Mistura de frequências

Permite visualizar modos on-line. Baseado em interferometria de Mach-Zehnder do feixe a analisar com um feixe de referência, obtido do feixe a analisar por divisão de amplitude, filtrado espacialmente e desviado em frequência acusto-ópticamente (Liesenhoff and Rühl 1995). Os modos são caracterizados pelos padrões estacionários obtidos pela sincronização das suas frequências com a frequência da onda de referência. O uso de métodos de *phase-shifting* permite recuperar a distribuição de fase dos modos.

Analysaram um laser contínuo de CO_2 com uma configuração estável de cavidade. Observaram, em particular, modos híbridos TEM_{10}^* (donut), fig. 4.4, resultantes da sobreposição coerente de modos TEM_{10} e TEM_{01} desfasados de $\pi/2$.



Fig. 4.4 Fase módulo 2π dum modo híbrido TEM₁₀* observado (Liesenhoff and Rühl 1995).

Aparentemente o método não é indicado para análise de amplitudes e pesos modais (os autores não mencionem este aspecto) uma vez que na interferência de um modo sincronizado com o feixe de referência, todos os outros modos aparecem como fundo (sem interferir).

Análise de coerência espacial

A composição modal do feixe pode ser calculada conhecendo a função de coerência espacial transversa (ver cap. 3, sec. 3.2.2), que pode ser medida com um interferómetro de duas aberturas (Tervonen, Turunen et al. 1989; Turunen, Tervonen et al. 1989) ou de fibras gémeas (Anderson and Fuhr 1993) com varrimento espacial.

(Iaconis and Walmsley 1996) utilizaram um interferómetro de Sagnac com desvio lateral, imposto por uma placa paralela rotativa, e placas de retardamento de fase para medição da parte real e imaginária da função de coerência complexa de um feixe. Testaram o método com um feixe TEM₀₀ tendo reconstruído o perfil de amplitude Gaussiano e a frente de onda parabólica. A construção da função de correlação do campo requer medições para vários desvios laterais e em duas direcções ortogonais.

(Warnky, Anderson et al. 2000) utilizaram o método das fibras gémeas (fig. 4.5a) na análise de modos não degenerados de um laser semiconductor em duas direcções ortogonais. Analisaram a matriz de intensidade mútua com um algoritmo que permitiu calcular os pesos e perfis modais, supondo apenas a ortogonalidade dos modos (fig. 4.5b). Admitiram a separabilidade nas direcções de simetria do laser o que reduziu a análise bidimensional a uma dupla análise linear.

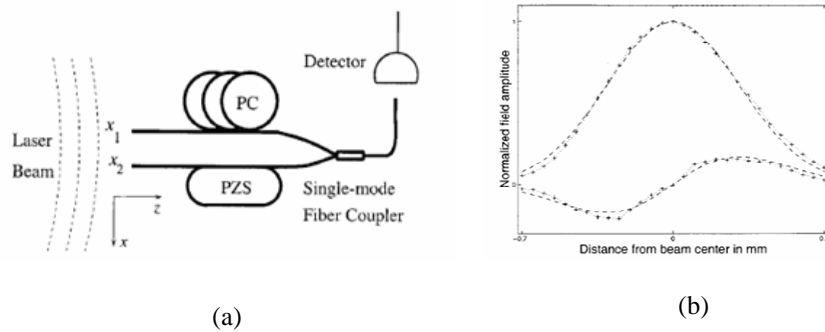


Fig. 4.5 (a) Método da fibras gémeas para medidas de coerência espacial;
(b) Perfis modais reconstruídos (Warnky 2000).

Holografia computacional

(Golub, Prokhorov et al. 1982) (Bartelt, Lohmann et al. 1983) demonstraram uma técnica de correlação óptica baseada em filtros de correlação espacial holográficos gerados por computador para análise de um feixe laser em termos de funções ortogonais. Os hologramas consistiam em máscaras binárias e eram multiplexados - representavam simultaneamente vários modos. O método foi testado na análise de modos de uma fibra óptica multimodo em termos de funções Laguerre-Gauss. Uma compilação de trabalhos análogos pode encontrar-se em (Soifer and Golub 1994).

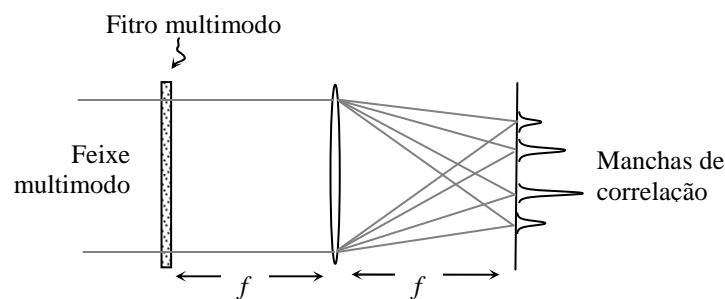


Fig. 4.6 Um holograma para análise modal (MODAN) é um filtro de correlação óptica ajustado aos modos a medir. As intensidades centrais das manchas de correlação medem as potencias modais. (adaptado de Soifer, ibid).

O que torna o método holográfico tão atraente é a rapidez e facilidade de extracção dos coeficientes modais a partir do padrão de difracção, uma vez que a computação é essencialmente óptica (fig. 4.6). Sem entrar em detalhes (no cap. 6 expomos um método que tem este como caso particular), os picos de correlação óptica observados medem a intensidade da projecção dos modos do feixe ϕ_i em modos ajustados de medida ϕ_j representados holograficamente:

$$I_j \propto \overline{\left| \int d\mathbf{p} \phi_j^* \left(\sum_i c_i \phi_i \right) \right|^2} = \delta_{ij} \overline{|c_j|^2}. \quad (4.3.4)$$

As dificuldades associadas à realização de hologramas por meios convencionais e os erros resultantes de alinhamento e desajuste entre modos analisados e modos registados tornam esta técnica porventura pouco prática, o que talvez explique o aparente esquecimento da mesma². Recentemente esta técnica foi retomada para a análise de modos do tipo Laguerre-Gauss sintetizados por meio de filtros de fase (Golub, Shimshi et al. 2007).

As técnicas de filtros holográficos referidas usavam hologramas convencionais (estáticos) multiplexados de modo a medir vários modos simultaneamente. Os picos de correlação espacial mediam a potência de cada modo (isto assumindo que os hologramas estivessem convenientemente ajustados). Seria assim impossível discernir se os modos estavam temporalmente correlacionados ou não, i.e. se se tratava duma composição modal coerente ou incoerente. Na verdade a técnica foi testada na análise de composições coerentes (nomeadamente as resultantes da saída duma fibra óptica multimodo com injeção coerente). Embora tenham sido proposta a possibilidade de interferência holográfica entre diferentes componentes modais para a análise dos coeficientes complexos daquelas composições, isso nunca foi realizado, que saibamos. Também não foi considerada a utilidade de interferir componente modais para análise de feixes parcialmente coerentes, que podem incluir simultaneamente composições modais coerentes e incoerentes.

² A principal motivação na altura em que estas técnicas foram desenvolvidas seria a sua aplicação ao estudo de fibras multimodo então usadas em comunicações ópticas e entretanto substituídas por fibras monomodo.

4.4 Técnicas propostas

Nesta secção apresentamos, de forma semi-qualitativa, os métodos de análise de feixe que são o objectivo da presente tese e que serão expostos em detalhe nos capítulos 6 e 7. Pretendemos aqui delinear os seus princípios físicos e justificar a sua relevância à luz das técnicas revistas na secção anterior.

4.4.1 Interferometria holográfica

Limitações dos métodos existentes

Tal como a perfilometria de feixe não permite extrair pesos modais, a não ser que as funções modais fossem bem conhecidas, as medidas de correlação holográfica modal requerem um alinhamento entre modos medidos e modos representados no holograma (modos de medida). As únicas técnicas que em princípio não requerem um conhecimento *a priori* das funções modais - apenas a sua ortogonalidade e descorrelação -, são as técnicas interferométricas de análise de coerência espacial.

Infelizmente, os métodos baseados em medidas de coerência são relativamente lentos pois requerem uma grande quantidade de dados, numa análise bidimensional do campo. Com medições muito esparsas da matriz de coerência espacial, mais uma vez só com conhecimento *a priori* das funções modais se torna possível calcular a composição modal recorrendo a técnicas de ajuste de dados, que mais não são do que a generalização das técnicas de ajuste de perfil de irradiância (diagonal da matriz de coerência).

Para um campo amostrado numa grelha com $N \times N$ pontos, o número de elementos não redundantes $J(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = J^*(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ da matriz de coerência espacial é³

$$\#J = N^2 \frac{N^2 + 1}{2} \sim N^4 / 2. \quad (4.4.1)$$

³ Mesmo para uma grelha modesta de 10x10 pontos, seriam necessárias 5 000 medições de franjas (amplitude e fase).

Como vimos no cap. 3 (sec. 3.4.2), a matriz de coerência $J(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ pode separar-se em duas matrizes nas coordenadas ortogonais, $J_x(x_1, x_2)$ e $J_y(y_1, y_2)$, permitindo reduzir a análise de coerência bidimensional a uma dupla análise unidimensional e, conseqüentemente, a reduzir drasticamente o número de medidas de correlação ($\sim N^2$). Contudo, vimos também que a separabilidade é garantida somente para modos de cavidade separáveis e descorrelacionados mas que havendo uma sobreposição coerente de modos separáveis (e.g. num modo híbrido) a matriz de coerência não é separável.

Uma dificuldade adicional nos métodos de coerência é a relativa dificuldade em medir a sua fase. Como também vimos (ibid.), no caso de modos Hermite-Gauss descorrelacionados, as funções modais são reais (abstraindo do factor de onda esférica) bem como a intensidade mútua resultante. Nesse caso o sinal da função de coerência pode ser inferido pela continuidade do módulo nos pontos de anulação (anulação da visibilidade das franjas). Contudo, para combinações coerentes de modos Hermite-Gauss, os respectivos modos coerentes (modos de cavidade híbridos) podem ter um perfil de amplitude de valores complexos e, conseqüentemente, a intensidade mútua será também complexa.

Método proposto: correlação modal holográfica

Um holograma modal pode ser usado para correlacionar as projecções do campo medido na base modal representada no holograma, geralmente diferentes devido a um desajuste geométrico, e não apenas para medir a amplitude daquelas projecções, tornando o método holográfico análogo ao método de correlação de campo de dois pontos, como ilustrado na fig. 4.7.

No capítulo 6 mostraremos como, através de hologramas gerados por computador endereçados num modulador espacial electro-óptico, podemos interferir duas componentes modais Ψ_1 e Ψ_2 , desfasadas δ_{12} , obtendo uma intensidade

$$I_{12} = \langle \Psi_1 | J | \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 | J | \Psi_2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \{ \exp(i\delta_{12}) \langle \Psi_1 | J | \Psi_2 \rangle \} \quad (4.4.2)$$

onde J é intensidade mútua na base de medida (ver cap. 3, sec. 3.2) que, uma vez conhecida, permite calcular as componentes modais do campo.

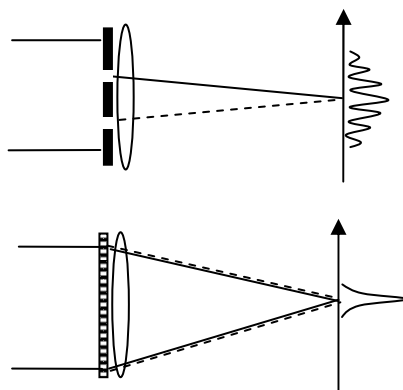


Fig. 4.7 Analogia entre (a) correlação de dois pontos e (b) correlação de dois modos do campo. (a) as duas aberturas seleccionam duas componentes pontuais do campo; a interferência entre elas caracteriza a coerência espacial mútua (b) um filtro holográfico selecciona duas componentes modais do campo; a sua interferência caracteriza a coerência intermodal.

Veremos ainda que o método de correlação de campo holográfica proposto partilha as principais qualidades encontradas no método de correlação de dois pontos e no método holográfico de filtros ajustados, respectivamente: (i) não requer o conhecimento *a priori* das funções modais; rapidez na aquisição de dados. Ao mesmo tempo não sem as principais desvantagens dos mesmos: (i) dificuldade na medição da fase de coerência; erros de desajuste.

4.4.2 Difusão dinâmica de luz

No capítulo 7 expomos os detalhes teóricos e experimentais de uma técnica de análise de coerência baseada em difusão dinâmica de luz (Pereira, Ferreira et al. 2005) e cujos princípios são antevistos aqui.

É bem sabido que a difusão de luz coerente por um meio desordenado origina um campo difundido com uma distribuição de intensidade granular – padrão de granitado laser (*speckle*). Se o meio for dinâmico o padrão está continuamente a mudar com a configuração do meio. A intensidade (espacial instantânea ou temporal num ponto fixo) flutua com uma distribuição característica de uma fonte Gaussiana. A distribuição de intensidade é uma exponencial negativa cuja dispersão iguala o valor médio da intensidade.

Se o meio for iluminado com luz totalmente incoerente, a intensidade difundida não tem que pode ser vista como a soma de infinitas componentes coerentes sem relação de fase, cujos padrões de speckle se sobrepõe formando um padrão uniforme, sem speckle.

Se o meio for iluminado com luz parcialmente coerente, i.e. se a coerência mútua normalizada entre diferentes pontos do meio não for unitária nem nula, é natural esperar uma distribuição de intensidade de speckle como a mostrada na fig. 4.8. A partir da análise estatística do padrão de speckle deve ser possível obter uma medida da coerência global no volume difusor.

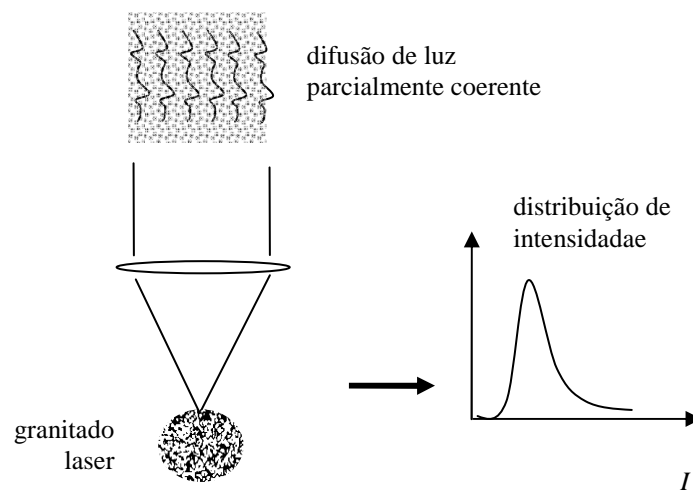


Fig. 4.8 A difusão de luz parcialmente produz um padrão de speckle cuja estatística depende da distribuição de coerência mútua dentro do volume difusor.

Em particular mostraremos que se o meio for iluminado com dois feixes com coerência mútua γ , a variância da intensidade difundida tem a interessante relação

$$\sigma_I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2|\gamma|^2. \quad (4.4.3)$$

que tem aplicação directa na medição da coerência temporal de uma laser, fazendo incidir no meio difusor dinâmico um feixe e a sua réplica dividida e atrasada.

Para analisar o speckle dinâmico, usaremos uma técnica bem conhecida e usada na caracterização de meios dispersos, espectroscopia de autocorrelação de intensidade (Degiorgio and Lastovka 1971). A autocorrelação de intensidade na origem (tempo de atraso nulo) é precisamente a variância do sinal de intensidade.

Veremos ainda a medição de contraste de speckle é mais robusta quando comparada com medições de visibilidade de franjas interferométricas, por dois motivos: (i) o contraste de speckle não é afectado por vibrações do sistema; (ii) nem pela área finita do detector, se o speckle for captado com uma fibra óptica monomodo (detecção coerente).

4.5 Conclusão

Técnica revistas:

- Na análise espectral de feixes as técnicas mais comuns são: redes de difracção (resolução baixa); interferometria de Michelson (resolução intermédia); interferómetro de Fabry-Perot (resolução elevada).
- Na análise modal transversa, os sensores de frente de onda são úteis apenas para análise de frentes de onda em feixes espacialmente coerentes, enquanto as técnicas baseadas em medidas de irradiância requerem um conhecimento prévio dos perfis modais e das correlações intermodais.
- As técnicas de correlação de dois pontos permitiriam, por inversão da intensidade mútua, obter a expansão em modos coerentes (ortogonais e descorrelacionados).

Contudo dificuldades práticas associadas às medições de coerência não permitiram ainda uma análise simplesmente baseada na inversão de coerência.

- Filtros holográficos ajustados aos modos espaciais dum feixe foram demonstrados para medição da distribuição de potência modais. O inconveniente maior desta técnica é o conhecimento preciso dos perfis modais ou seja a sensibilidade ao desajuste entre modos medidos e representados.

Técnicas propostas

- Antevemos uma técnica de análise modal transversa baseada holografia dinâmica, que é uma generalização tanto da técnica de correlação de dois pontos como da técnica de filtros espaciais ajustados. A técnica proposta baseia-se no conceito de correlação de componentes do campo numa base arbitrária; não necessita dum conhecimento preciso dos perfis modais e permite a análise de feixes com coerência espacial arbitrária.
- Propomos ainda utilizar a difusão dinâmica de luz como um método de análise de coerência do feixe incidente no meio difusor, através da análise do contraste nas flutuações de speckle, que deve diminuir com a perda de coerência no volume difusor. Em particular propomos usar o método para medição da coerência temporal fazendo incidir no meio difusor um feixe juntamente com a sua réplica dividida e atrasada opticamente.

Capítulo 5

Modulador espacial de luz TN-LCD

Caracterizámos um modulador espacial de luz, baseado num display de cristais líquidos do tipo twisted-nematic (TN-LCD) que foi usado como elemento difractivo para análise transversa de feixes laser (cf. cap. 6). As curvas de modulação de fase e amplitude do modulador dependem dos estados de polarização seleccionados à entrada e à saída do mesmo, bem como do comprimento de onda. Propomos um novo método de medição da modulação que usamos para uma optimização rápida e in-situ das curvas de modulação. O modelo usado, LCX-016AL (Sony), foi optimizado para funcionar como modulador de amplitude (633 nm) e de fase (514 nm). Usamos o modo de modulação de amplitude para geração e interferência holográfica de modos espaciais Hermite-Gauss.

Plano do capítulo

- 5.1 Introdução
- 5.2 Moduladores espaciais TN-LCD
 - 5.2.2 Propriedades de modulação
 - 5.2.3 Características de difracção
- 5.3 Caracterização dum modulador TN-LCD
 - 5.3.1 Especificações do modelo
 - 5.3.2 Caracterização da matriz
 - 5.3.3 Calibração da modulação
 - 5.3.4 Qualidade óptica
- 5.4 Hologramas modais com um TN-LCD
 - 5.4.1 Hologramas gerada por computador
 - 5.4.2 Geração de modos transversos
- 5.5 Conclusão

5.1 Introdução

A *óptica difractiva* é um conjunto de tecnologias e aplicações de *elementos ópticos difractivos* (DOEs), que são matrizes de micro-elementos que segmentam e modulam a luz (Herzig 1997; Turunen and Wyrowski 1998). A maioria dos DOEs distingue-se das redes de Bragg, porque os seus elementos são finos e caracterizados por uma função de transmitância; e das redes de difracção usadas em espectroscopia, pelo tamanho maior dos seus elementos.

Os DOEs mais comuns são estáticos: lentes de Fresnel, redes de micro-lentes e filtros de fase. Entre as aplicações mais interessantes em lasers referira-se a selecção modal intra-cavidade (Leger, Chen et al. 1995) e a transformação externa de feixes Gaussianos em feixes de Bessel aproximados, com difracção muito reduzida (Leach, Gibson et al. 2006).

Os DOEs dinâmicos ou *moduladores espaciais de luz* (SLMs) estão a substituir os DOEs estáticos. Os mais usados são electricamente endereçáveis, nomeadamente os baseados em cristais líquidos e os baseados em micro-espelhos. As principais áreas de aplicação dos SLMs são a óptica adaptativa (Hu, Xuan et al. 2004) e a micro-manipulação óptica (Grier 2003).

Os moduladores de cristal líquido do tipo *twisted-nematic* (TN-LCD) são os mais acessíveis por se encontrarem nos projectores de vídeo e seu interesse para processamento óptico foi reconhecido á muito (Liu, Davis et al. 1985).

Neste trabalho estamos interessados em usar um SLM do tipo TN-LCD para análise modal transversa de feixes lasers (ver cap 6). Na secção 5.2 apresentamos as propriedades gerais dos displays de cristais líquidos (LCD) do tipo *twisted-nematic* (TN). Na secção 5.3 descrevemos a caracterização e calibração dum dispositivo deste tipo para operar como modulador de amplitude ou fase. Na secção 5.4, testamos o modulador para geração e interferência holográficas de modos transversos.

5.2 Moduladores espaciais TN-LCD

5.2.1 Propriedades de modulação

Princípio de funcionamento

A figura 5.1 ilustra o funcionamento de uma célula TN-LC como modulador de amplitude binário. Na fase nemática as moléculas de um cristal líquido orientam-se numa direcção comum sem ordem de posição, apresentando uma forte birrefringência. O contacto com placas de vidro polidas em direcções perpendiculares favorece a configuração torcida. Uma onda polarizada segundo o eixo molecular à entrada, rodará a sua polarização acompanhando a rotação das moléculas (Saleh and Teich). Quando um determinado campo eléctrico axial é aplicado (tensão aplicada em filmes de ITO), orienta as moléculas segundo a sua direcção, anulando a birrefringência e a polarização da onda transmitida mantém-se. Um polarizador de saída (analizador) traduz a variação de polarização numa resposta de transmissão tipo ON/OFF.

Para tensões intermédias, a birrefringência muda de forma contínua com a orientação variável dos eixos moleculares em relação à direcção do campo eléctrico, e o modulador da fig. 5.1 funciona como modulador de intensidade variável. Contudo esta variação de intensidade transmitida com o campo aplicado é acompanhada por uma variação de fase, importante em aplicações coerentes.

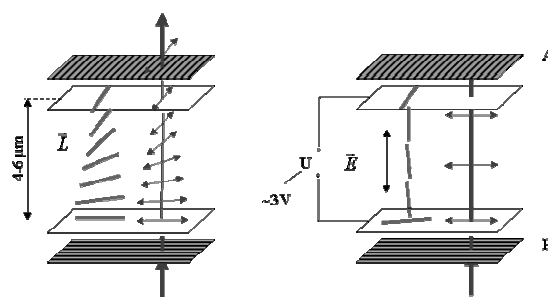


Fig. 5.1 Elemento TN-LCD com polarizadores lineares ortogonais funcionando como modulador binário de intensidade.

Modelo de Jones

Um modelo analítico da matriz de Jones, que descreve a polarização da onda transmitida, em função da tensão aplicada em células TN-LC é descrito em (Yariv and Yeh 1984). Para um ângulo de torção molecular de 90° entre a entrada e saída a matriz de Jones, escrita no sistema de coordenadas com eixo dos xx segundo o eixo director das moléculas à entrada é

$$\mathbf{J}(\beta) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\pi}{2\gamma}\right) \text{sen}(\gamma) & \cos(\gamma) + i \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \text{sen}(\gamma) \\ -\cos(\gamma) + i \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \text{sen}(\gamma) & \left(\frac{\pi}{2\gamma}\right) \text{sen}(\gamma) \end{bmatrix}. \quad (5.2.1)$$

Esta matriz depende unicamente do parâmetro de birrefringência

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\pi d}{\lambda} (n_e(\theta) - n_0) \\ \gamma &\equiv \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

onde d é a espessura da célula moduladora e n_o e n_e são os índices de refração ordinário e extraordinário.

O índice extraordinário n_e depende por sua vez do ângulo de inclinação θ molecular em relação ao plano transversal através de

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_e^2} + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{n_0^2}, \quad (5.2.3)$$

que varia de forma não linear com a diferença de potencial V entre as superfícies de entrada e saída:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{V - V_c}{V_0} \right) \right] \right\}, \quad V > V_c \quad (5.2.4)$$

$$\theta = 0, \quad V < V_c$$

onde V_c é uma tensão de corte, abaixo da qual o campo não orienta as moléculas, e V_0 é uma tensão de saturação, acima da qual a orientação é quase 90° . (Estes parâmetros dependem da temperatura).

Determinação dos parâmetros do modelo

(Saleh and Lu 1990) mostraram, analítica e numericamente, que a birrefringência normalizada β/β_{\max} é em boa aproximação uma função dependente apenas da tensão normalizada $(V - V_c)/V_0$, para a gama de birrefringências dos cristais líquidos nemáticos (fig. 5.2).

$$\frac{\beta}{\beta_{\max}} \cong \text{função} \left(\frac{V - V_c}{V_0} \right) \quad (5.2.5)$$

$$\beta_{\max} = \frac{\pi d}{\lambda} (n_e - n_o)$$

Este facto notável permite caracterizar universalmente os moduladores TN-LCD com giração de 90° (e dentro das aproximações físicas subjacentes ao modelo) apenas por três parâmetros: $\{\beta_{\max}, V_0, V_c\}$. (É claro que β_{\max} depende do comprimento de onda).

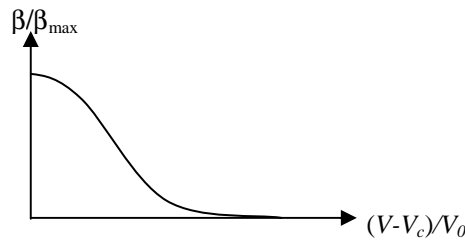


Fig. 5.2 Variação da birrefringência normalizada com a tensão normalizada numa célula TN-LCD é practicamente independente da birrefringência ($n_e - n_o$) do cristal líquido (Saleh and Lu 1990).

Os moduladores TN-LCD são habitualmente proprietários, não se conhecendo os seus parâmetros internos. Para medição daqueles parâmetros, a variação da polarização expressa na matriz de Jones com a tensão aplicada V é traduzida numa variação de amplitude complexa transmitida através de uma sanduíche polarizador-TNLCD-Analisador (fig. 5.3), com matriz de Jones do sistema

$$\mathbf{J}_A(\alpha_A) \mathbf{J}_{LCD}(\beta) \mathbf{J}_P(\alpha_P). \quad (5.2.6)$$

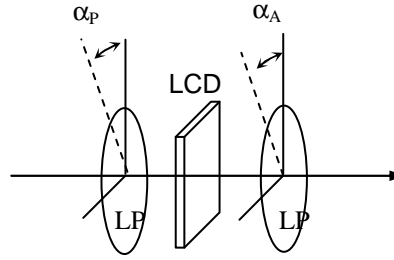


Fig. 5.3 Configuração usual de um SLM baseado num TN-LCD entre dois polarizadores lineares.

A curva de modulação depende dos ângulos do polarizador e analisador.

Medidas da fase e amplitude da onda transmitida em função da tensão aplicada para ângulos de orientação conhecidos dos polarizadores (tipicamente $(0,90^\circ)$) e o ajuste dessas medidas à transmitância calculada pelo modelo de Jones, permite determinar experimentalmente β_{\max} , V_0 e V_c . (Saleh and Lu 1990)

Nalguns casos o ângulo de giração (*twist*) e a orientação à entrada do eixo director molecular não são conhecidos, e têm de ser determinados (Soutar and Lu 1994). Um modelo mais realista deve ter em conta os efeitos de superfície (alteração do ângulo de inclinação θ nas interfaces) (Márquez, Campos et al. 2000). Uma dificuldade adicional encontrada em dispositivos proprietários é o desconhecimento da tensão aplicada V mas apenas o valor de nível de cinzento endereçado (o LCD é um monitor), que pode ter uma relação não linear com aquela tensão, sendo necessário caracterizar a birrefringência β para cada nível de cinzento (Kim and Lee 2005).

Calibração da modulação

Os moduladores baseados em TN-LCD têm curvas de operação (transmissão complexa fase-amplitude em função da tensão aplicada) muito sensível aos estados de polarização impostos à entrada. Sem uma calibração cuidadosa, estes moduladores apresentam tipicamente curvas de modulação em espiral, como ilustra a fig. 5.4.

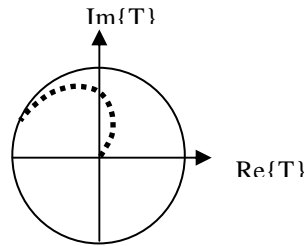


Fig. 5.4 Curva espiral típica de modulação de um SLM baseado num TN-LCD.

Cada um dos pontos representa um nível de modulação. Há um acoplamento fase-amplitude.

Não sendo possível modular independentemente a fase e amplitude, interessa obter uma modulação só de fase (amplitude constante) ou só de amplitude fase constante), suficiente na maioria das aplicações, nomeadamente holografia. Na prática é possível otimizar os estados de polarização de entrada e saída da maioria dos TN-LCDs de modo a obter-se curvas de operação quase-fase (*mostly phase*) ou quase-amplitude (*mostly amplitude*). A maioria das aplicações de uma modulador de fase requerem contudo uma gama de variação de 2π , difícil de se alcançar na maioria destes moduladores, dada a limitação na sua birrefringência máxima, especialmente em comprimentos de onda elevados.

Uma vez parametrizado o modelo de Jones do LCD, o procedimento de calibração envolve tipicamente uma procura numérica de polarizações óptimas de entrada e saída que produzem uma curva de modulação desejada (Márquez, Iemmi et al. 2001). A utilização dos estados de polarizações próprios elípticos da matriz de Jones do LCD é vantajosa para modulação de fase (Pezzaniti and Chipman 1993).

5.2.2 Características de difracção

Modelo da matriz

Um LCD é modelado como uma matriz, fig. 5.5, com $N_x \times N_y$ píxeis, tendo cada píxel um espaçamento ou passo (Δ_x, Δ_y) e um tamanho (δ_x, δ_y). Desprezando a transmissão das zonas inter-píxel, e considerando que os píxeis se comportam como filmes finos, a transmitância pode ser representada pela expressão

$$T(x, y) = \sum_{p=0}^{N_x-1} \sum_{q=0}^{N_y-1} t_{pq} \operatorname{rect}\left(\frac{x - p\Delta_x}{\delta_x}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y - q\Delta_y}{\delta_y}\right) \quad (5.2.7)$$

onde t_{pq} é a transmitância do píxel (p, q) . A expressão acima pode escrever-se na forma matematicamente mais conveniente

$$T(x, y) = \left[t(x, y) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{L_x}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{L_y}\right) \operatorname{comb}\left(\frac{x}{\Delta_x}\right) \operatorname{comb}\left(\frac{y}{\Delta_y}\right) \right] \otimes \left[\operatorname{rect}\left(\frac{x}{\delta_x}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{\delta_y}\right) \right] \quad (5.2.8)$$

pondo a origem de coordenadas no centro da matriz, de dimensão (L_x, L_y) , e onde $t(x)$ é a função que se quer amostrar em pontos de largura δ espaçados Δ .

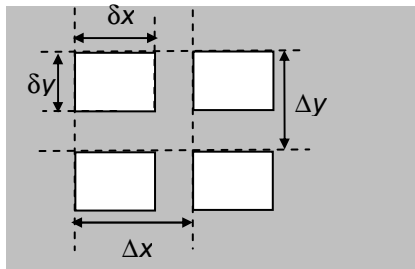


Fig. 5.5 Tamanho de píxel δ e passo de píxel Δ .

Se a matriz for iluminada por um campo incidente E_i , o campo transmitido é

$$E_t(x, y) = T(x, y) E_i(x, y), \quad (5.2.9)$$

cuja transformada de Fourier é então¹

$$\begin{aligned} \widetilde{E}(u, v) &= \widetilde{E}(u, v) \otimes \widetilde{t}(u, v) \\ &\otimes \text{sinc}(L_x u) \text{sinc}(L_y v) \\ &\otimes [\text{comb}(\Delta x u) \text{comb}(\Delta y v)] \\ &\times \text{sinc}(\delta x u) \text{sinc}(\delta y v). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

como ilustrado na fig. 5.6.

As frequências espaciais (u, v) correspondem, na aproximação paraxial, aos ângulos de difracção de Fraunhofer (α, β) , ou às coordenadas espaciais no plano focal de uma lente de Fourier (x_f, y_f) :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{x_f}{\lambda f}; \\ v &= \frac{\beta}{\lambda} = \frac{y_f}{\lambda f}; \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

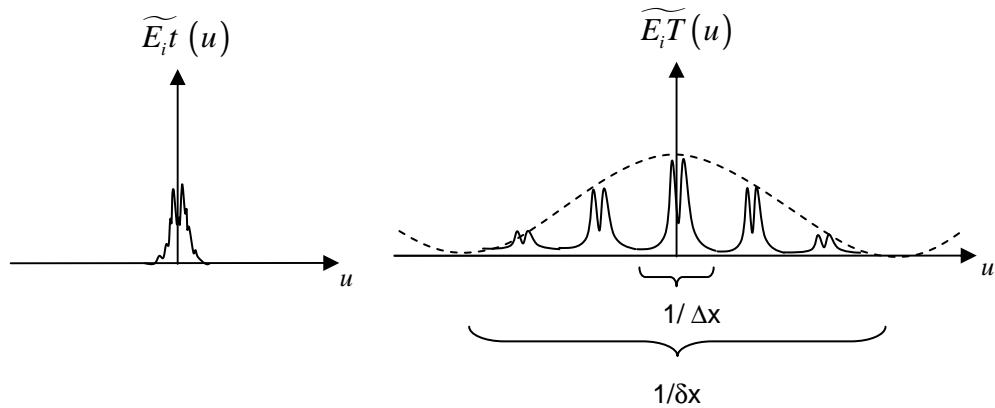


Fig. 5.6 Efeitos da matriz do modulador no padrão de Fourier da onda transmitida: replicação (ordens de

¹ A menos dum factor constante dependente dos parâmetros geométricos da matriz.

difracção); apodização (linha tracejada); suavização (efeito da pupila de abertura). T é a transmitância da matriz, que discretiza uma função de modulação t .

O efeito da abertura é limitar a resolução do espectro, não podendo ser discriminadas frequências separadas de menos de $1/L$, correspondendo à resolução angular de difracção

$$resolução\ angular = \frac{\lambda}{L}. \quad (5.2.12)$$

Na prática a resolução angular é muitas vezes limitada pelo menor diâmetro do feixe incidente.

As ordens de difracção vizinhas (*alias*) sobrepõem-se (*aliasing*), limitando a largura de banda útil à zona central do espectro – ordem 0 – com frequência $|u|, |v| \leq 1/\Delta_x, 1/\Delta_y$, traduzindo o limite de Nyquist de amostragem de $t(x,y)$. O ângulo máximo de difracção (limitado pela matriz) correspondente é então

$$angulo\ máximo\ de\ difracção = \frac{\lambda}{2\Delta} \quad (5.2.13)$$

O produto espaço \times largura de banda define a capacidade de amostragem ou “resolução” da matriz $N\Delta \times 1/\Delta = N$.

O tamanho finito dos píxeis produz uma envolvente em seno cardinal que distorce e limita o padrão de difracção (apodização). O tamanho dos píxeis relativamente ao passo é o factor de preenchimento (linear). Em cada dimensão,

$$factor\ de\ preenchimento = \frac{\delta}{\Delta} \leq 1 \quad (5.2.14)$$

Quanto maior for este factor maior será a eficiência de transmissão da matriz mas também mais pronunciado será o efeito de apodização do espectro:

$$apodização\ (ordem\ 0) \leq \text{sinc}\left(\frac{\delta}{2\Delta}\right) \quad (5.2.15)$$

Para factores de preenchimento de 50% e 100% as apodizações máximas são 90% e 64% respectivamente.

Desprezando os efeitos de aliasing, da pupila de entrada, e de apodização, o campo difractado na ordem 0 é normalmente aproximado por

$$\tilde{E}_{ordem\,0}(u,v) \approx \tilde{E}(u,v) \otimes \tilde{t}(u,v). \quad (5.2.16)$$

5.3 Caracterização dum modulador TN-LCD

5.3.1 Especificações do modelo

O modelo de que dispomos é o LC2002 [Holoeye Photonics] (fig. 5.7, tabela 5.1), que integra um display Sony LCX016AL-6 (sem polarizadores).



Fig. 5.7 Modulador *LC 2002* [Holoeye Photonics].

O LCD tem 800 x 600 elementos e 3.3 cm de diagonal

Tab. 5.1 Especificações do modulador *LC 2002*

Display	Sony LCX016AL-6
Tecnologia	TN-LCD
Sinal Vídeo	Analógico VGA
Resolução	800 x 600
Níveis de cinzento	256 (8 bits)
Píxel <i>pitch</i>	32 μ m
<i>Frame rate</i>	Max 60 Hz
Área activa	26.6 mm x 20.0 mm
Configuração	Por R232

O fabricante não especificava quantitativamente as características de modulação, indicando apenas um contraste máximo de intensidade 300:1 (transmitância máxima / transmitância mínima) e capacidades de modulação de fase “até quase 2π ” a 500nm. Também desconhecemos quaisquer parâmetros físicos relevantes para as propriedades de modulação dos elementos de cristal líquido (ver sec. 5.2.1).

5.3.2 Caracterização da matriz

A separação especificada para os píxeis da matriz (passo) é de $\Delta = 32 \mu\text{m}$, permitindo uma modulação com frequência máxima de cerca de 30 linhas/mm. Para um comprimento de onda de $\lambda \sim 500 \text{ nm}$, a separação angular entre as ordens de difracção $\lambda/\Delta \sim 1^\circ$ correspondendo a um ângulo máximo de difracção (*sem aliasing*) de $\sim 0.5^\circ \approx 10 \text{ mrad}$ (fig. 5.8).

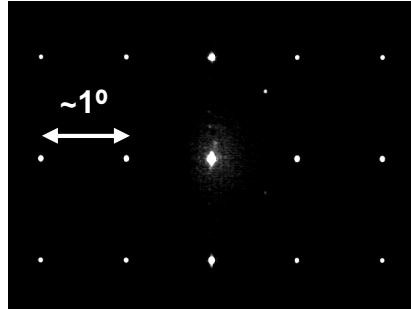


Fig. 5.8 Padrão de difracção de Fraunhofer ($\lambda=514 \text{ nm}$) do LCD não modulado observado no plano focal de uma lente ($f = 50 \text{ mm}$).

Para uma iluminação uniforme (raio de feixe muito maior que o passo de píxel), a intensidade do padrão de difracção, na aproximação (5.2.16) é

$$I(x, y) = I_0 \frac{\sin^2(\pi\delta_x u)}{\pi\delta_x u} \frac{\sin^2(\pi\delta_y v)}{\pi\delta_y v} \frac{\sin^2(N_x \pi\Delta_x u)}{\sin^2(\pi\Delta_x u)} \frac{\sin^2(N_y \pi\Delta_y v)}{\sin^2(\pi\Delta_y v)} \quad (5.3.1)$$

Embora um ajuste da intensidade medida à expressão acima permita, em princípio, obter a

geometria da matriz, os erros de não linearidade ou limitação da gama dinâmica de detecção de intensidade condicionam a exactidão de tal ajuste (Banyal and Prasad 2005).

Medição do passo da matriz

Uma maneira simples de medir o passo entre os píxeis é a medição do ângulo de difracção de um feixe não expandido observado num alvo suficientemente distante (fig. 5.9). Obtivemos um passo de 32.2 μm concordante com o valor especificado (ver tabela 5.2).

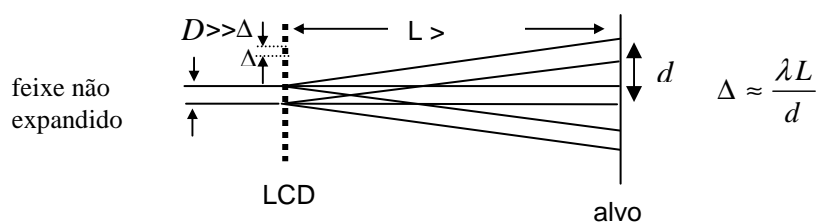


Fig. 5.9 Medição do passo da matriz por difracção na aproximação paraxial.

Medição do factor de preenchimento

O factor de preenchimento especificado é de 80% mas como observamos a quase extinção das ordens de difracção 6 e 12, na direcção x , e 3 e 6 na direcção y , associada ao factor de preenchimento, concluímos que aquele factor tem de ser significativamente diferente nas diferentes eixos da matriz.

Formamos uma imagem da matriz usando uma objectiva microscópica ($f=10\text{mm}$) que permitiu facilmente registar uma imagem magnificada da matriz do CCD cerca de 30x (fig. 5.10). Esta imagem revela uma forma dos píxeis acentuadamente rectangular correspondendo a factores de preenchimento na vertical e na horizontal muito diferentes. Os resultados estão na tabela 5.2 e concordam com a quase anulação das ordens de difracção prevista pela expressão (5.3.1).

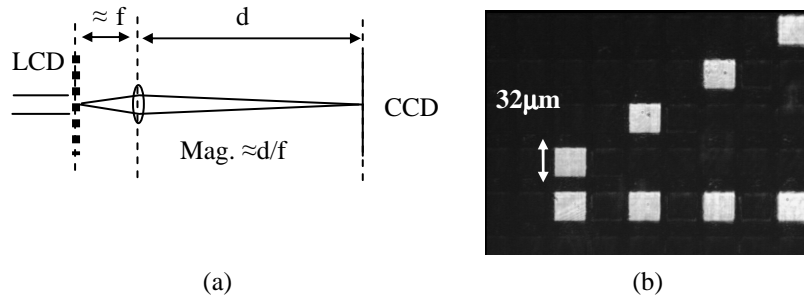


Fig. 5.10 A ampliação da matriz LCD. (a) montagem; (b) imagem com modulação binária ON/OFF.

Tab. 5.2 Medições da geometria da matriz LCD.

	Factor de preenchimento [%]	Passo [μm]
Medidas por imaging	$\delta x/\Delta x = 83 \pm 4$ $\delta y/\Delta y = 65 \pm 3$	- -
Medidas por difracção	$\delta x/\Delta x \approx 83$ $\delta y/\Delta y \approx 67$	$\Delta x = 32.2 \pm 0.4$ $\Delta y = 32.5 \pm 0.4$

Auto-imagens

O *efeito Talbot*, descoberto em 1836 (Patorski 1989), consiste na produção de imagens por difracção de Fresnel (auto-imagens) de uma onda plana por uma rede regular. Essas auto-imagens replicam o campo transmitido pela rede a intervalos regulares (fig. 5.11) separados pela *distância de Talbot*:

$$z_T = \frac{2\Delta^2}{\lambda} \approx 3 \text{ mm} \quad (5.3.2)$$

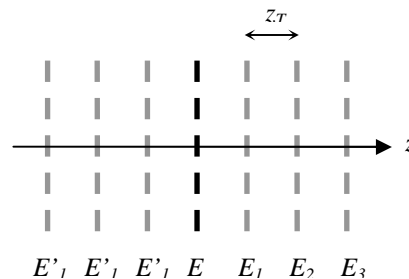


Fig. 5.11 A difracção de Fresnel de um campo regular $E(x) = E(x + \Delta)$ produz auto-imagens reais E_n e virtuais E'_n em planos equidistantes.

A configuração de formação de imagens da fig. 5.10, com o LCD não modulado ou modulado por um padrão regular, magnifica uma auto-imagem sempre que o plano objecto da lente coincide com um plano de Talbot correspondente, que pode estar à frente da lente (real) ou atrás (virtual) (Bernardo and Soares 1988). Assim, a única forma de sabermos que estávamos a focar o plano do LCD era usando uma modulação com um padrão irregular como mostra a fig. 5.10.

É interessante notar que também observamos auto-imagens com a montagem da fig. 5.12, que equivale a iluminar a rede com uma onda esférica (fonte pontual). Esta configuração produzia imagens da rede continuamente magnificadas na região de Fraunhofer, como se de uma sombra se tratasse: este fenómeno é discutido em (Azaña, Lugo et al. 2005).

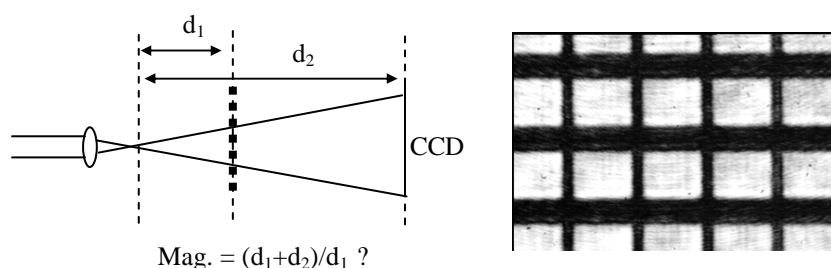


Fig. 5.12 Montagem para obter auto-imagens magnificadas da matriz e um exemplo duma auto-imagem.

5.3.3 Calibração da modulação

Introdução

A calibração dos estados de polarização de entrada e saída do LCD para obtenção de uma curva de modulação desejada é geralmente feita por procura numérica após a caracterização dos parâmetros da matriz de Jones do dispositivo, tal como foi descrito na sec. 5.2.2. Tal procedimento é complicado e moroso e teria de ser repetido para cada comprimento de onda de operação. No final, as curvas de operação previstas teriam de ser comparadas com as curvas efectivamente medidas, que se desviam sempre daquelas devido às aproximações físicas implícitas no modelo de Jones do LCD (ex.: efeitos de superfície; relação entre nível

de modulação e tensão aplicada).

Uma calibração da modulação por tentativas e erros, sem conhecimento da matriz de Jones do modulador, é impraticável, se para cada configuração de polarização testada for necessário medir a amplitude e fase transmitida para vários níveis de modulação separadamente. Tal procedimento empírico é no entanto viável se pudermos medir simultaneamente vários níveis de modulação e visualizar as curvas correspondentes em tempo real.

É importante que o sistema de calibração da modulação seja *in situ*, uma vez que a modulação é extremamente sensível ao alinhamento e posicionamento dos elementos polarizadores (em especial elementos retardadores de fase), que não devem por isso ser deslocados numa montagem de teste para uma montagem de aplicação.

As técnicas usadas na medição da transmitância dividem-se em duas classes: interferométricas e difractivas. Nas técnicas interferométricas a fase é obtida com um interferómetro de Mach-Zender (Saleh and Lu 1990) ou de duas fendas (Soutar, Monroe Jr et al. 1994). A amplitude é medida separadamente eliminando um dos feixes interferidos.

Nas técnicas difractivas o LCD é modulado com um padrão de Rochi (barras alternadas teste-referência) (Zhang, Lu et al. 1994). A intensidade dos picos de difracção de ordem 0 e superiores permite obter tanto a fase como a amplitude.

O principal inconveniente destas técnicas é a necessidade de se efectuar uma medição para cada nível de modulação isoladamente, não se podendo visualizar as curvas de modulação, para uma configuração de polarização, antes de todas as medidas estarem feitas (a não ser que se monte um sistema de aquisição e análise de dados automático).

Uma técnica baseada num interferómetro de desvio lateral foi proposta para para medição *in situ* da modulação de fase (Neto, Roberge et al. 1995). Este interferómetro é simplesmente uma placa de vidro com um pequeno ângulo de cunha inserido no feixe de saída do modulador e é inerentemente estável.

Aperfeiçoamos a referida técnica incluindo uma lente de imagem e um anteparo, o que nos permitiu observar num único interferograma vários níveis de modulação de fase e amplitude simultaneamente. Usamos uma placa paralela em vez de uma placa em cunha, com vantagens adicionais. Também mostramos como a filtragem espacial da imagem facilita a análise do interferograma. Como aplicação do método proposto, optimizamos

visualmente o nosso TN-LCD para modulação quase-amplitude e quase-fase em dois comprimentos de onda distintos.

Polarização do modulador

Para criar estados de polarização elípticos à entrada e seleccionar estados de polarização elípticos à saída utilizamos a configuração da fig. 5.13.

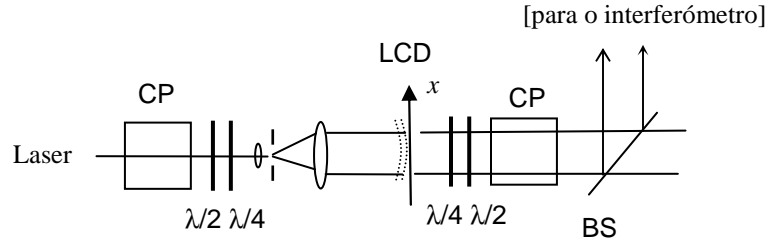


Fig. 5.13 O SLM é um TN-LCD entre elementos polarizadores elípticos. O feixe é expandido antes do LCD.

Evitamos o uso de polarizadores lineares de filme, uma vez que a qualidade destes é insatisfatória para a ampliação que pretendemos (ver Apêndice I). Usamos em vez disso, cubos polarizadores combinadas com lâminas de meia onda.¹

A resposta transmissiva do sistema é

$$\begin{aligned} E_y^{out} &= A(n) \exp[i\phi(n)] E_y^{in} \\ E_x^{out} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

onde se pretende medir a amplitude A e fase ϕ em função do nível de modulação n .

¹ A localização absoluta dos elementos polarizadores é irrelevante, uma vez que a polarização e a difracção são operações que comutam.

Interferómetro

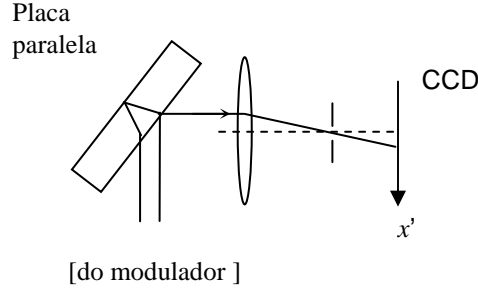


Fig. 5.14 Interferómetro de desvio lateral com formação de imagem para medições da modulação complexa do SLM.

Uma lente forma duas imagens sobrepostas, por reflexão numa placa paralela, da pupila de saída de modulador, lateralmente desviadas de

$$s = t \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta)}} \quad (5.3.4)$$

Sendo $E(x,y)$ o campo incidente no SLM com transmissão $t(x,y)$, o campo no plano da imagem $E'(x',y')$, formada através da reflexão na superfície frontal placa paralela é

$$E'_1(m\mathbf{r}) = \frac{\rho_1}{m} \exp\left(-ik\widetilde{P_1P'}\right) E(\mathbf{r}) \quad (5.3.5)$$

onde ρ_1 é o coeficiente de reflexão na superfície, m o factor de magnificação e o factor de fase dá a contribuição do caminho óptico entre os pontos conjugados P e P' . Analogamente o campo da imagem reflectida pela segunda superfície da placa paralela

$$E'_2(m\mathbf{r}) \approx \frac{\rho_2}{m} \exp\left[-ik\left(\widetilde{P_1P'} + \Delta\right)\right] E(\mathbf{r}-\mathbf{s}) \quad (5.3.6)$$

onde s é o desvio lateral imposto pela placa Δ é a diferença de caminho óptico associada à

transmissão na placa.

Se o modulador, com transmissão $T(\mathbf{r})$, for iluminado com um feixe não colimado aproximado por uma onda parabólica de raio R , muito maior que a largura do feixe, o campo à saída do modulador é

$$E(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r})T(\mathbf{r})\exp\left(-ik\frac{|\mathbf{r}|^2}{2R}\right) \quad (5.3.7)$$

Se o LCD for modulado com um padrão de faixas horizontais num fundo de referência

$$T_{LCD}(x, y) = \begin{cases} A(y)\exp(i\varphi(y)), & x < 0 \\ A_0 \exp(i\varphi_0), & x > 0 \end{cases} \quad (5.3.8)$$

e se for interposto um anteparo opaco como ilustrado na fig. 5.15

$$T_{anteparo}(x, y) = \begin{cases} 1, & x > -S \\ 0, & x < -S \end{cases} \quad (5.3.9)$$

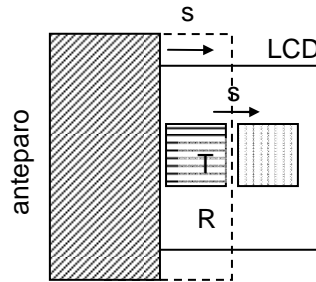


Fig. 5.15 O LCD é modulado com um padrão de barras (T) num fundo de referência (R). A imagem direita do anteparo sobrepõe-se à imagem esquerda de T resultando numa imagem da transmitância; a imagem direita de T sobrepõe-se ao fundo de referência produzindo franjas de interferência que medem a modulação de fase.

a transmitância total será

$$T(\mathbf{r}) = T_{LCD}(\mathbf{r})T_{anteparo}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & x < -S \\ A(y)\exp[i\varphi(y)] & -S < x < 0 \\ A_0 \exp[i\varphi_0] & x > 0 \end{cases} \quad (5.3.10)$$

A intensidade resultante no plano da imagem será $I = |E_1' + E_2'|^2$. Usando as expressões anteriores, (5.3.5) a (5.3.10), e após cálculos triviais, obtém-se:

$$I(m\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & x < -S \\ \left| \frac{\rho_1}{m} \right|^2 |E_0(\mathbf{r})|^2 |A(\mathbf{r})|^2 & -S < x < 0 \\ \left| \frac{\rho_1}{m} \right|^2 |E_0(\mathbf{r})|^2 |A_0|^2 + \left| \frac{\rho_2}{m} \right|^2 |E_0(\mathbf{r}-\mathbf{s})|^2 |A(y)|^2 & 0 < x < S \\ + 2 \frac{|\rho_1 \rho_2|}{m^2} |E_0(\mathbf{r})| |E_0(\mathbf{r}-\mathbf{s})| |A_0| |A(y)| \cos \left\{ ik \left[\frac{s^2}{2R} + \Delta - \frac{s}{R} x + \varphi(y) \right] \right\} & 0 < x < S \\ \left| \frac{\rho_2}{m} \right|^2 |E_0(\mathbf{r}) + E_0(\mathbf{r}-\mathbf{s})|^2 |A_0|^2 & x > S \end{cases} \quad (5.3.11)$$

O interferograma é dividido em quatro regiões definidas pelos pontos $(-s, 0, s)$. As duas regiões centrais mostram a modulação do SLM (ver fig. 5.17): na região esquerda $-mS < x' < 0$ observa-se a modulação de intensidade; na região direita $0 < x' < mS$ observam-se franjas de interferência com largura

$$d_f = m \frac{\lambda}{S} R \quad (5.3.12)$$

cujo desvio

$$\Delta x' = \frac{\Delta \varphi(y)}{2\pi} d_f \quad (5.3.13)$$

mede a modulação de fase.

Reconhecemos na expressão (5.3.12) a separação de franjas (magnificada) produzidas por duas fontes pontuais vistas a uma distância R e separadas lateralmente de s .

O uso de uma placa paralela em vez de uma placa em cunha¹ (comum em interferômetros de *shearing*) permite regular a distância entre as franjas ajustando a colimação do expensor de feixe que faz variar o raio de curvatura R das frentes de onda. Este interferômetro pode ainda ser usado para verificar o estado de colimação e avaliar a qualidade da frente de onda.

Filtragem espacial

Os interferogramas são “despixelados” opticamente por meio de filtragem espacial ilustrada na fig. 5.13, que isola a ordem zero de difracção da matriz, eliminando as frequências que superam a frequência de Nyquist, sem significado. A filtragem espacial permite evitar efeitos de Moire entre as duas imagens da matriz LCD e entre estas e a matriz CCD, facilitando a visualização do interferograma.

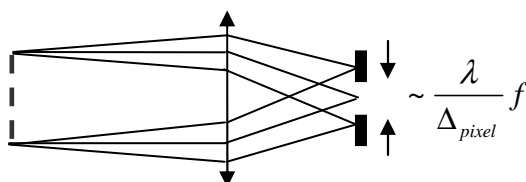


Fig. 5.16 Filtragem espacial no plano focal da lente de formação de imagem para bloquear ordens de difracção laterais do LCD.

A filtragem espacial da ordem zero não enviesa as mediadas de transmitância, uma vez que o modulador vai ser usado como elemento difractivo dentro da banda correspondente à ordem zero que é precisamente aquela passada pelo filtro espacial.

¹ Um ângulo residual de cunha introduz um termo de fase linear que em geral muda a orientação e espaçamento das franjas. A placa deve ser orientada para manter a verticalidade das franjas.

Análise dos interferograma

Para correcção da não uniformidade da intensidade do feixe e de aberrações eventuais das franjas, usou-se um interferograma de referência (modulação uniforme). A amplitude é a raiz quadrada do perfil do padrão de intensidade normalizado pelo mesmo sem modulação; a fase é o desvio relativo às franjas sem modulação multiplicado por 2π . O deslocamento das franjas foi determinado por análise de Fourier (Goldberg and Bokor 2001).

Resultados e discussão

A fig. 5.17 mostra um interferograma exemplo obtido com a montagem descrita (fig. 5.14), para quatro níveis de modulação do LCD. A fig. 5.18 mostra dois exemplos de curvas de modulação para 64 níveis de modulação, entre os níveis de cinzento 0 e 255.

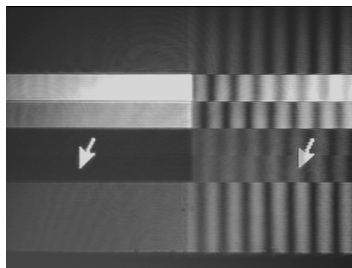
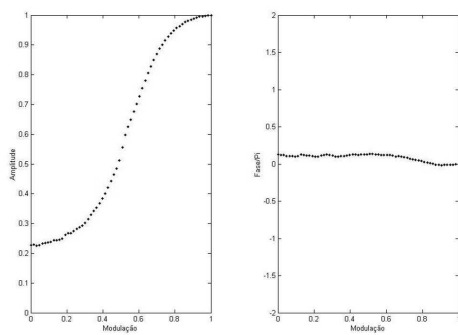
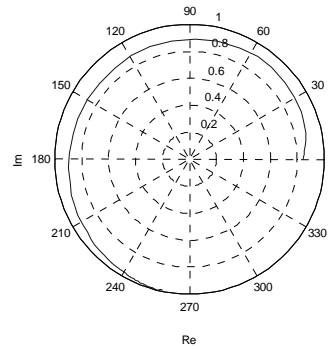


Fig. 5.17 Interferograma obtido com a montagem da fig. 5.14 mostrando modulação do SLM, apenas para quatro níveis de modulação para maior clareza, simultaneamente de amplitude (esquerda) e de fase (direita). O desvio lateral é indicado pela dupla imagem do ponteiro do rato, correspondendo a $s = 4$ mm.

As capacidades de modulação de fase do modelo de TN-LCD usado, LCX016AL-6, foi avaliada por outros autores que utilizaram um método difractivo (padrão de Ronchi) para medidas de transmitância, um ajuste a um modelo de Jones para medição da birrefringência a 500nm (Remenyi, Koppa et al. 2004) e a 400nm (Reményi, Várhegyi et al. 2003) e uma optimização também baseada em polarizações elípticas. Para 500 nm, aqueles autores referem uma modulação de fase com excursão de 1.1π acompanhada por uma variação de amplitude de 10%. Comparando a nossa optimização a 514nm, obtivemos uma modulação com maior alcance (1.5π e uma variação de amplitude semelhante).



(a) quase-amplitude



(b) quase-fase

Fig. 5.18 Curvas de modulação obtidas a partir de interferogramas como o da fig. 5.17 mas com 64 níveis lineares de modulação do LCD entre 0 e 1. (a) modo de modulação quase-amplitude para $\lambda = 632$ nm; (b) modulação quase-phase para $\lambda = 514$ nm.

A modulação de amplitude que encontramos a 633 nm tem um acoplamento de fase desprezável ($\sim 2\% \pi$) na região de modulação de modulação [0-150], onde a transmitância varia 60% da sua excursão, e de $\sim 10\% \pi$ entre os níveis 150 e 255. Apesar do contraste (transmitância máxima/mínima) ser apenas de 1:25 (1:5 em amplitude), não podemos esquecer que a optimização procurou maximizar a variação de amplitude e ao mesmo tempo minimizar a variação de fase. O valor de contraste indicado pelo fabricante (1:300) só pode ser alcançado à custa de um forte acoplamento de fase, irrelevante para aplicações incoerentes como projectores de vídeo.

5.3.4 Qualidade óptica

Um LCD é construído primariamente para ter aplicações de projecção de imagens, devendo por isso ter uma resposta uniforme entre píxeis; no entanto a sua qualidade óptica, que inclui camadas exteriores de revestimento, pode ser muito baixa¹. Em aplicações coerentes, como interferometria, a qualidade óptica é importante e por isso fizemos uma avaliação da

¹ Uma não uniformidade seria notada numa projecção incoerente como grãos na intensidade da imagem. Mas, tal como o relevo num slide, a qualidade óptica da superfície não afecta a qualidade da imagem.

aberração do LCD. Os detalhes da análise que se segue encontram-se no apêndice I.

A fig. 5.19 mostra franjas de igual espessura obtidas por reflexão de um feixe expandido e colimado no LCD desligado, que foi interpretada como resultante da interferência entre os feixes reflectidos nas superfícies externas do dispositivo.

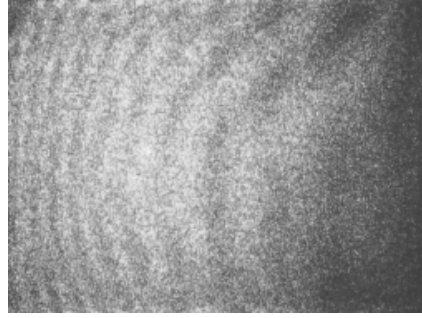


Fig. 5.19 Franjas de igual espessura obtidas por reflexão de um feixe colimado no LCD
(O granitado deve-se ao alvo difusor utilizado).

Um ajuste numa forma quadrática ao perfil de fase estimado pelos cumes das franjas observadas, mostrou que as franjas equivaliam essencialmente às de uma filme com faces em forma de cunha somado a uma lente ligeiramente astigmática. Após descontar termos irrelevantes de inclinação (*tilt*) e desfocagem (*defocus*), a aberração é a ilustrada na fig. 5.20.

Pode ver-se que o desvio máximo de fase é de $\pi/4$ ou $\lambda/8$ na área central com diâmetro ~ 200 píxeis; Calculando a *razão de Strehl*, definida como a razão entre a intensidade do centro de difracção de um feixe Gaussiano com aberrações e a mesma intensidade para o mesmo feixe sem aberrações, obtém-se um valor de 85% para um feixe Gaussiano com 200 píxeis de diâmetro.

$$Strehl\ ratio = \frac{\left| \int e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{i\phi(r)} d^2\mathbf{r} \right|^2}{\left| \int e^{-\frac{r^2}{w^2}} d^2\mathbf{r} \right|^2} = 0.85 \quad (w = 100\text{ pixels}) \quad (5.3.14)$$

A razão correspondente para a amplitude central do feixe difractado é $\sqrt{.85} = .92$. Para um estudo comparativo deste e doutros critérios de avaliação das aberrações dum feixe laser, ver (Perevezentsev, Poteomkin et al. 2007).

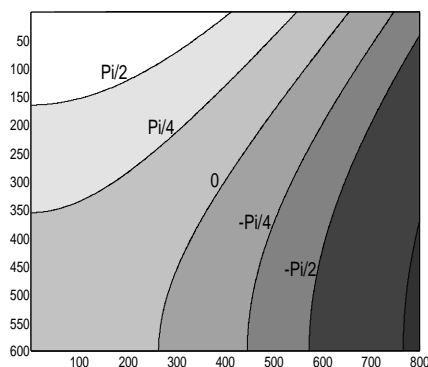


Fig. 5.20 Função de aberração estimada após subtracção de termos irrelevantes (inclinação e desfocagem - ver Apêndice I).

5.4 Hologramas modais com um TN-LCD

A geração holográfica de modos espaciais não é nova, sendo hoje comum a utilização de moduladores espaciais para gerar feixes Laguerre-Gauss (Arlt, Dholakia et al. 1998). O propósito desta secção é apenas testar a capacidade do modulador LCD como elemento holográfico para gerar e interferir modos transversos; tal capacidade é crucial no método de análise transversa de feixes multimodo exposto no capítulo 6.

5.4.1 Hologramas gerados por computador

Codificação de hologramas gerados por computador

Um holograma é, genericamente, qualquer representação da amplitude complexa (fase e amplitude) do campo difractado por um objecto (Goodman 1996). Num holograma gerado

por computador (CGH) (Tricoles 1987) essa representação é numérica, em vez de gerada opticamente. Para reprodução óptica¹, um CGH tem de ser transcrito para um holograma físico (holograma binário) por exemplo gravado num DOE estático ou endereçado num SLM electro-óptico. O objecto que pretendemos representar é um modo transversal de propagação de feixe e o TN-LCD será o holograma que o representa fisicamente.

Um holograma pode representar domínios diferentes do objecto (complexo; só fase) e pode ser modulado em vários domínios (amplitude; fase; híbrido). O processo de transcrição do domínio do objecto para o domínio do holograma é o processo de codificação.

Um modulador complexo (de fase e amplitude) seria a representação holográfica directa (sem codificação) do domínio complexo do objecto que se pode realizar associando um modulador de amplitude a outro de fase (Amako, Miura et al. 1993; Hsieh, Chen et al. 2007).

Muitas vezes só a fase do objecto é relevante, e um modulador de fase (nesse caso chamado *kinoforn*) é indicado, por exemplo para representar um objecto refractivo, como uma lente, ou corrigir a aberração de uma onda.

A modulação mista é muitas vezes considerada porque quase todos os tipos de registos holográficos físicos (especialmente os TN-LCDs, cf. sec. anterior) não funcionam num domínio de fase pura ou amplitude pura. Existem por isso técnicas mais ou menos sofisticadas de optimização da codificação em função do domínio que se quer representar e do domínio representável e ainda da aplicação (metrologia, visualização).

No caso presente pretendemos representar o domínio complexo de um modo espacial transversal e dispomos de um modulador LCD com domínios mistos mas que para os comprimentos de onda que nos interessam, a 514 nm (laser de Ar) e 633nm (laser de HeNe), tem domínios (muito aproximadamente) respectivamente fase e amplitude. A modulação de fase permite cobrir o plano complexo do objecto usando vários esquemas de codificação tais como: binária de fase $[0, \pi]$ (Neil, Booth et al. 1998); quaternária de fase $[0, \pi/2, \pi, 3/2\pi]$ (Buckley, Cable et al. 2006), viáveis para o nosso modulador a 514 nm. Como decidimos usar hologramas para análise de um feixe de HeNe (cap. 6) a codificação de fase foi excluída.

¹ Se a reprodução for numérica fala-se em *holografia digital*.

Sem dúvida a codificação mais simples é a do clássico “holograma de amplitude”, que, embora pouco eficiente energeticamente, é plenamente adequada para os nossos propósitos pois, além de ser permitida pelo domínio de modulação do TN-LCD no comprimento de onda do HeNe, fornece uma representação simples e precisa do campo.

Hologramas de amplitude

A forma mais simples de representar holograficamente a amplitude e fase de um campo é através do clássico holograma de amplitude *off-axis* de Leith-Upatnieks (Leith and Upatnieks 1963) (fig. 5.21), que resulta da interferência de uma onda de referência com o campo a representar.

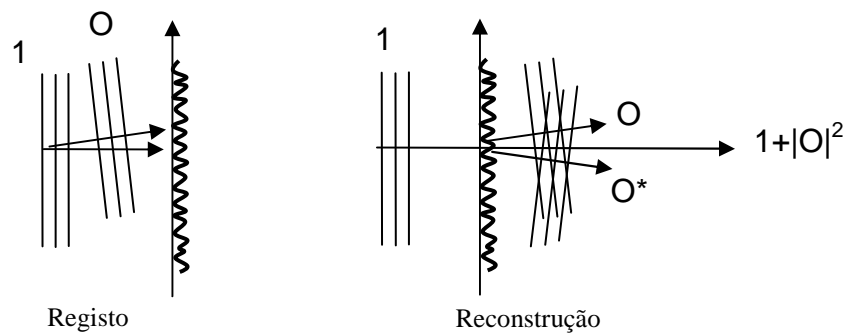


Fig. 5.21 Um holograma de amplitude de Leith-Upatnieks

é uma rede de transmitância sinusoidal (portadora) modulada em fase e amplitude.

A transmitância do holograma é

$$t = |R + O|^2 = |R|^2 + |O|^2 + R O^* + R^* O \quad (5.4.1)$$

Onde a referência R representa o feixe colimado incidente e O o objecto. Sendo R aproximadamente constante, os últimos termos representam o modo gerado e o seu conjugado, que, para serem distinguidos deverão propagar-se em direcções conjugadas fora do eixo óptico. Tal holograma se iluminado a mesma onda de referência gerará o campo pretendido:

$$Rt = R|R|^2 + R|O|^2 + R^2 O^* + |R|^2 O \quad (5.4.2)$$

Limite de resolução

Há medida que o feixe difractado pelo holograma se propaga, a onda objecto reconstruída e a sua gémea (onda conjugada) vão-se separando espacialmente. No limite de Fraunhofer, a separação é máxima. Se o holograma for reproduzido com uma lente de Fourier, o limite de Fraunhofer aparece no plano focal da lente (fig. 5.22). A condição de não sobreposição dos dois feixes equivale à separação dos respectivos espectros de frequências. Se O se propagar com um ângulo θ em relação a R , tal condição equivale a afirmar que a frequência espacial máxima do objecto representado obedece a

$$f_{\max} < \frac{2\theta}{\lambda} \quad (5.4.3)$$

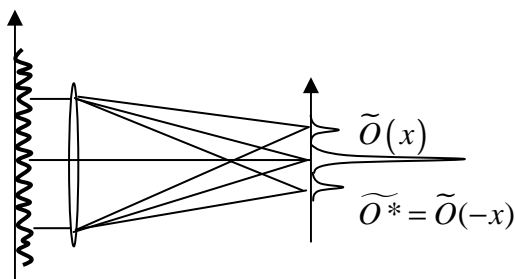


Fig. 5.22 Reprodução do holograma com uma lente de Fourier. A máxima frequência de modulação corresponde a metade da frequência portadora, para que não haja sobreposição das ondas gémeas.

Por outro lado, a frequência espacial do holograma endereçado no modulador espacial, com período espacial (passo da matriz) Δ , não pode ultrapassar o correspondente limite de Nyquist:

$$\frac{\theta}{\lambda} < \frac{1}{2\Delta} \quad (5.4.4)$$

Linearização e aberrações

A não linearidade na resposta do modulador, implica efeitos de soma de frequências espaciais, e notavelmente a geração de feixes fantasma (harmónicos superiores). Para evitar a não linearidade da curva de modulação do SLM pode escolher-se uma zona aproximadamente linear $[T_{\min}, T_{\max}]$ e onde a variação de fase é desprezável. A transmitância normalizada será

$$T = T_{\min} + \frac{T_{\max} - T_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}} (t - t_{\min}) \quad (5.4.5)$$

Alternativamente pode usar-se uma *lookup table* (LUT) para linearizar a curva de transmitância aproveitando o máximo de gama dinâmica (contraste) possível. Nos exemplos apresentados neste capítulo seguimos o primeiro método; em aplicações mais precisas (cap. 6) seguimos o segundo.

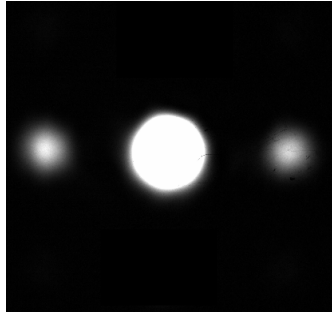


Fig. 5.23 Feixe dividido por uma rede sinusoidal.

A eficiência de difracção ~ 10%. O feixe não difractado satura o detector.

A figura 5.23 mostra a divisão de um feixe de HeNe por uma rede sinusoidal de amplitude, corrigida com uma LUT. A transmitância da rede é

$$t = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2} + \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2} \cos(k\theta x) \quad (5.4.6)$$

A eficiência difractiva medida, definida como a potência de um dos feixes difractados relativa ao feixe não difractado, foi de 10%, o que corresponde ao contraste C medido (fig.5.23):

$$\eta \equiv \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{4} \left[\frac{t_{\max} - t_{\min}}{t_{\max} + t_{\min}} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\sqrt{C} - 1}{\sqrt{C} + 1} \right]^2 \approx 10\% \Leftrightarrow C \approx 25:1 \quad (5.4.7)$$

Sem uma LUT, escolhendo a região linear de modulação, no intervalo [0.2 .8], a eficiência seria cerca de 3%.

Se a aberração óptica do modulador for conhecida, pode ser descontada do objecto a representar, multiplicando este pelo conjugado da função de aberração. Já o acoplamento de fase da curva de modulação, sendo dependente do nível de modulação, só pode ser descontado, usando métodos iterativos de correcção dos hologramas.

5.4.2 Geração de modos transversos

Hologramas modais

Por exemplo, para gerar um modo com perfil espacial ϕ_m na direcção (θ_x, θ_y) , com amplitude complexa c_m , o holograma de amplitude seria

$$t_m(x, y) \propto \left| A + c_m \phi_m(x, y) \exp(ik\theta_x x + ik\theta_y y) \right|^2 \quad (5.4.8)$$

onde A pode ser escolhido de modo a maximizar o contraste das franjas de interferência e por isso maximizar potência do modo difractado¹.

¹ Não estávamos muito preocupados com a eficiência difractiva e tomamos A=1.

Hologramas multiplexados

Um holograma multimodal será o equivalente a um holograma de múltipla exposição

$$t(x, y) = \sum_m t_m(x, y) \quad (5.4.9)$$

podendo-se assim gerar modos propagando-se com direcções, amplitudes e fases relativas arbitrárias. É possível assim, gerar-se a interferência de dois modos fazendo com que as suas direcções sejam coincidentes e fazendo variar a amplitude e fase relativas.

A fig. 5.24 mostra exemplos de padrões de intensidade transversa de feixes gerados por hologramas modais de amplitude. Os hologramas foram calculados usando uma frequência da portadora de cerca 1/5 da frequência de Nyquist do modulador (10 píxeis por franja) e iluminados por um feixe de He-Ne.

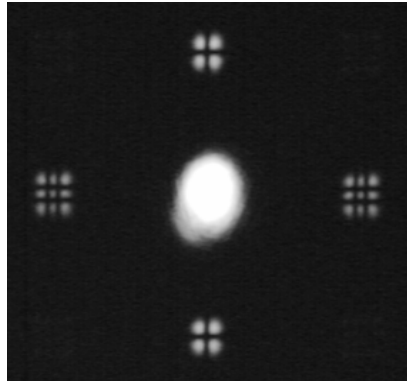


Fig. 5.24 Modos Hermite-Gauss (11) e (22) geradas com um holograma de amplitude multiplexado.

A figura 5.25 mostra um ajuste da intensidade do modo HG_{10} gerado holograficamente à curva teórica de intensidade. Apesar de o feixe de reconstrução não ser uniforme (feixe expandido com raio cerca de três vezes maior que o raio dos modos representados), como admitido no registo numérico dos hologramas, o ajuste é satisfatório.

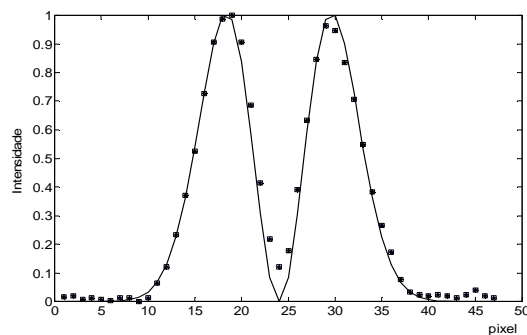


Fig. 5.25 Ajuste do perfil de intensidade do modo Hermite-Gauss (1,0) calculado (linha) ao observado (pontos).

Interferência holográfica de dois modos gerados

A figura 5.26 mostra dois hologramas bimodais para gerar e interferir os modos Hermite-Gaussianos (01) e (10). A figura 5.27 mostra o perfil transversal de irradiância do feixe gerado com um holograma igual à soma dos dois hologramas da fig. 5.26, mostrando os padrões familiares de interferência entre aqueles modos.

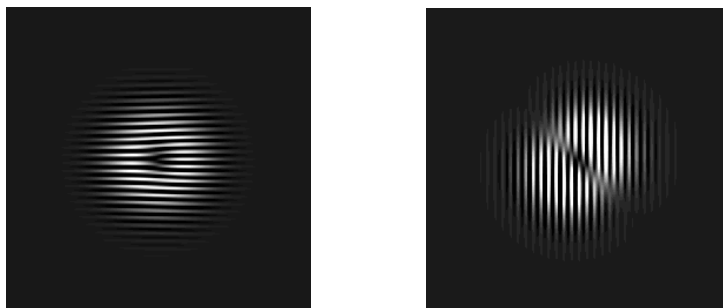


Fig. 5.26 Hologramas de amplitude [500x500 elementos] para gerar a interferência holográfica entre modos Hermite-Gauss de ordens (0,1) e (1,0), com desfasamentos relativos de $\pi/2$ (esquerda) e π (direita).

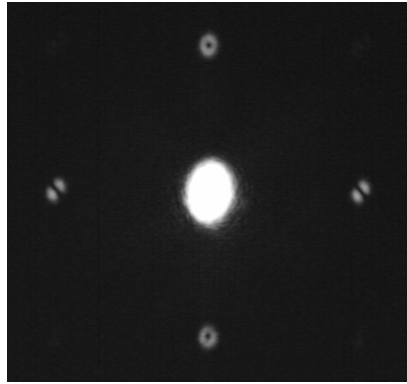


Fig. 5.27 Interferência holográfica entre (0,1) e (1,0), com diferença de fase $\delta = \pi$ (horizontal) e $\pi/2$ (vertical).

Os padrões de difracção foram captados por uma câmara próximo da zona focal da lente de Fourier. Para modos Gaussianos isolados, ou feixes Gaussianos multimodo contendo modos com a mesma fase de Gouy, o perfil transversal de irradiância é estacionário (ver cap. 2) e não importa a posição da câmara detectora, desde que as ordens de difracção do holograma não se misturem.

5.5 Conclusão

Avaliamos as características de um modulador espacial do tipo TN-LCD como elemento difractivo: geometria da matriz; qualidade óptica; características de modulação.

A geometria da matriz (píxeis) foi caracterizada por difracção e por formação de imagens e de auto-imagens. O método de formação de imagem é mais simples que os métodos difractivos e deverá ser equivalente dentro do domínio paraxial (tamanho dos píxeis muito maior que o comprimento de onda). O ângulo de difracção máximo sem aliasing é da cerca de 1° .

A qualidade óptica foi avaliada (a 514 nm) com um interferómetro do tipo Fizeu. A função de aberração medida, após descontar termos de inclinação e desfocagem, tem um desvio máximo de $\sim \lambda/8$ na região central (200x200 píxeis) e de $\sim \lambda/4$ na região periférica.

Para a medição das curvas de modulação, em função das polarizações elípticas de entrada e de saída, montamos um interferómetro de *shearing* com formação de imagem. Este interferómetro é in-situ e tem como vantagem principal, em relação às técnicas existentes, permitir visualizar e registar num único interferograma uma curva de modulação completa (fase e amplitude em função dos níveis de cinzento).

Os estados de polarização foram calibrados para obtenção de modos de modulação de fase ou de amplitude. A 633 nm (laser He-Ne) obtivemos modulação quase-amplitude com um contraste de 1:25; a 514 nm (laser de Árgon) obtivemos modulação quase-fase com uma gama de $3/2\pi$.

Usamos modulação de amplitude para geração holográfica de modos Hermite-Gauss, a partir dum feixe de He-Ne quase Gaussiano. Realizamos ainda hologramas multiplexados para geração simultânea de vários modos e interferência entre modos com fases distintas. Os padrões de irradiância do campo difractado confirmam os resultados.

Sugestões para trabalho futuro

- A optimização visual que fizemos das curvas de modulação, baseada no interferómetro proposto, deveria ser comparada com a optimização numérica, baseada em medições prévias dos parâmetros do modelo de Jones do modulador.
- A função de aberração do modulador poderia ser directamente descontada da função representada no holograma. Também os erros resultantes do imperfeito desacoplamento fase-amplitude poderiam ser compensados, usando métodos iterativos conhecidos de geração de hologramas por computador.
- Julgamos que o modulador é útil para realizar pinças ópticas, em particular modo de operação de fase a 514 nm, desde que se usem técnicas de codificação de fase adequadas, nomeadamente codificação de fase ternária ou quaternária

Capítulo 6

Análise modal transversa holográfica

Propomos uma técnica holográfica para análise transversa de feixes laser baseada na correlação de componentes do campo numa base arbitrária (cf. cap. 3). Utilizamos um modulador espacial do tipo TN-LCD (cf. cap. 5) para interferir holograficamente pares de componentes modais do campo numa base arbitrária. A diagonalização da matriz de correlação resultante, permite expandir o campo em modos espacialmente coerentes. Analisamos um feixe de He-Ne, tendo sido identificados três modos coerentes que foram ajustados a modos Hemite-Gauss, cujo raio do modo fundamental foi determinado. Um dos modos identificados é um híbrido $m+n=2$ (cf. cap.2). A análise de irradiância no campo próximo e distante confirma os resultados.

Plano do capítulo

- 6.1 Introdução
- 6.2 Correlação de campo holográfica
 - 6.2.1 Projecção do campo numa base modal de medida
 - 6.2.2 Interferência das componentes na base de medida
 - 6.2.3 Matriz de correlação e reconstrução do campo
- 6.3 Simulações numéricas
 - 6.3.1 Filtros “ajustados” desajustados
 - 6.3.2 Representação do campo numa base incompleta
- 6.4 Análise modal transversa de um laser He-Ne
 - 6.4.1 Montagem experimental
 - 6.4.2 Feixe analisado e escolha da base de medida
 - 6.4.3 Resultados
 - 6.4.4 Discussão
- 6.5 Conclusão

6.1 Introdução

Na presente secção apresentamos os princípios do método a que podemos chamar "correlação modal de campo holográfica". Tal técnica é uma aplicação da teoria apresentada no cap. 3 (sec. 3.3), e permite analisar o campo de um feixe laser numa base arbitrária, que chamaremos "base de medida". Em as funções da base de medida diferem das funções modais da cavidade que gera o feixe, que admitiremos desconhecidas.

Utilizaremos hologramas que representam dois "modos" da base de medida para interferir pares de componentes do campo nessa base. A diagonalização da matriz de correlação resultante fornece os modos coerentes do feixe e as suas potências relativas.

Quando as componentes são medidas isoladamente, o método reduz-se ao conhecido método de filtros ajustados. Já a interferência entre as componentes permitirá contornar um inconveniente da técnica de filtros ajustados: a necessidade de conhecer as funções modais do feixe e em particular a sua posição e escala precisa.

Por outro lado, a técnica proposta pode ser vista como um análogo da correlação de dois pontos, em que agora os "pontos" são componentes espaciais do campo na base de medida. Tal como naquela, o conhecimento a priori das funções modais não é necessário, mas, se uma aproximação razoável for dada de início, a técnica holográfica permite aproximar o campo com um número relativamente reduzido de medidas de correlação.

Os modos da base de medida diferem em geral dos modos espacialmente coerentes do feixe, que pretendemos medir; estes por sua vez podem coincidir com modos isolados da cavidade ou híbridos associados a modos degenerados em frequência, como discutido no cap. 3, (sec. 3.2).

A notação que usaremos através deste capítulo para designar funções modais está resumida na tabela 6.1.

Tabela 6.1 Notação para funções modais

$\Psi; [mn]$	modo da base de medida
$\Phi; \dots\dots\dots$	modo coerente do feixe
$\phi; (mn)$	modo da cavidade laser

Experimentalmente propomo-nos utilizar um SLM como holograma dinâmico, que testamos para o efeito no cap. 5, obviando o registo dos hologramas (gerados por computador) em meios convencionais e facilitando o alinhamento dos mesmos por software. O diagrama da fig. 6.1 esquematiza o sistema, que será detalhado mais adiante.

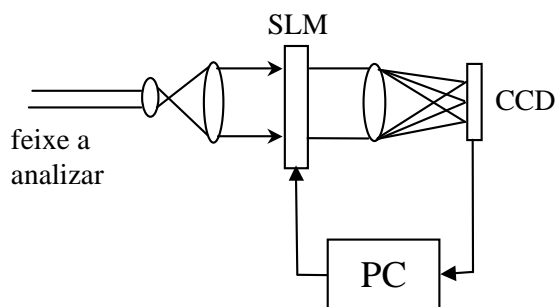


Fig. 6.1 Sistema holográfico dinâmico para análise espacial de frentes de onda. Um modulador espacial de luz (SML) é modulado com o padrão holográfico gerado por computador (PC) de pares de modos espaciais numa base de medida. Os picos do padrão de difracção observados no CCD medem a correlação intermodal.

O método pode ser resumido na sequência:

1. Escolher base de medida para representar o campo
2. Projectar holograficamente o campo em pares de elementos da base
3. Medir interferência entre componentes de cada par
4. Calcular matriz de correlação entre componentes
5. Diagonalizar matriz de correlação
6. Calcular modos coerentes do campo
7. Ajustar os modos coerentes a modos da cavidade

6.2 Correlação de campo holográfica

6.2.1 Projecção do campo numa base modal de medida

Suponhamos uma base de representação espacial do campo transversal de um feixe paraxial quase-monocromático¹ constituída por funções $\{\Psi_k\}$. Se tal campo iluminar uma transparência complexa (fase e amplitude) representando uma dessas funções

$$t_k(x, y) = \Psi_k^*(x, y) \quad (6.2.1)$$

o centro da transformada de Fourier do campo transmitido, correspondente à frequência espacial nula, mediria a projecção do campo de entrada no campo representado

$$\widetilde{t_k E}(0) = \int \Psi_k^* E \, dx dy \equiv \langle \Psi_k | E \rangle. \quad (6.2.2)$$

Não dispondo de um modulador de fase e amplitude para realizar um filtro complexo, recorreremos à técnica de VanderLugt (Goodman 1996), para realizar filtros complexos por meio de filtros holográficos de amplitude.

Vamos usar hologramas modais de amplitude do tipo Leith-Upatniecks, como fizemos para a geração modal (cf. cap. 5, sec. 5.4), com transmitância

$$t_k(x, y) = \left| \exp(ik\theta x) + \exp(i\delta_k) \Psi_k(x, y) \right|^2. \quad (6.2.3)$$

A expressão (6.2.3) traduz a interferência entre uma onda plana de referência, inclinada de um ângulo pequeno θ em relação ao eixo de propagação z , com o campo da função modal Ψ_k , desfasado δ_k .

Se este holograma for iluminado com um feixe laser com campo transversal $E(x, y)$, a onda transmitida pelo holograma será:

¹ Vamos a usar a aproximação paraxial da difracção no campo distante, que para um campo quase-monocromático é pouco dependente do comprimento de onda.

$$\begin{aligned}
E_t(x, y) &= t_k(x, y)E(x, y) \\
&= E(x, y) \left[1 + |\Psi_k(x, y)|^2 \right] \\
&\quad + \exp(ik\theta x) \exp(-i\delta_k) \Psi_k^*(x, y) E(x, y) \\
&\quad + \exp(-ik\theta x) \exp(i\delta_k) \Psi_k(x, y) E(x, y)
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Para um campo incidente uniforme, os últimos dois termos representam o modo Ψ_k e o seu conjugado, propagando-se em direcções $\pm\theta$.

A transformada de Fourier do campo transmitido (6.2.4) é

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_t(u, v) &= \tilde{E}(u, v) + \tilde{E}(u, v) \otimes \tilde{\Psi}_k(u, v) \otimes \widetilde{\Psi_k^*}(u, v) \\
&\quad + \exp(-i\delta_k) \widetilde{\Psi_k^*}(u, v) \otimes \tilde{E}(u, v) \otimes \delta(u - u_\theta, v) \\
&\quad + \exp(+i\delta_k) \tilde{\Psi}_k(u, v) \otimes \tilde{E}(u, v) \otimes \delta(u + u_\theta, v)
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

onde as frequências espaciais correspondem às posições espaciais (x', y') no plano de Fourier duma lente com distância focal f

$$(x', y') = \lambda f \times (u, v). \tag{6.2.6}$$

No espaço de Fourier observam-se três bandas (fig. 6.2): uma banda central (primeiros dois termos) e duas laterais (últimos dois termos) centradas em $(\pm u_\theta, 0) = (\pm\theta/\lambda, 0)$, correspondendo às posições espaciais $(\pm x'_\theta, 0) = (\pm f\theta, 0)$.

Admitindo um ângulo θ suficientemente grande, de modo a separar razoavelmente aquelas bandas, o campo difractado em $(u_\theta, 0)$ será

$$\tilde{E}_t(u_\theta, 0) \approx \exp(-i\delta_k) \tilde{\Psi}_k \otimes \tilde{E}(0, 0) \tag{6.2.7}$$

que pode ser expresso em termos de um integral de sobreposição

$$\widetilde{\Psi^*} \otimes \widetilde{E}(0,0) = \widetilde{\Psi_k^* E}(0,0) = \int \Psi_k^* E \, dx \, dy \equiv \langle \Psi_k | E \rangle. \quad (6.2.8)$$

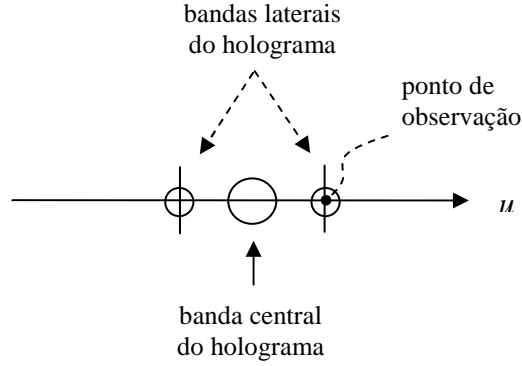


Fig. 6.2 Bandas de Fourier do holograma de amplitude.

Conclui-se assim que no centro da banda lateral de difracção (*mancha de correlação espacial*), o campo é proporcional à projecção entre o campo de entrada e o campo da representação modal

$$\tilde{E}_t(u_\theta, 0) \approx \exp(-i\delta_k) \langle \Psi_k | E \rangle \quad (6.2.9)$$

Analogamente teríamos para a outra banda

$$\tilde{E}_t(-u_\theta, 0) \approx \exp(+i\delta_k) \langle \Psi_k^* | E \rangle \quad (6.2.10)$$

Observe-se a diferença entre as duas projecções (6.2.9) e (6.2.10), que representam, respectivamente, a decomposição do campo na base $\{\Psi_k\}$ e na base conjugada $\{\Psi_k^*\}$. As duas representações são no entanto equivalentes:

$$E = \sum_k \langle \Psi_k | E \rangle \Psi_k = \sum_k \langle \Psi_k^* | E \rangle \Psi_k^* \quad (6.2.11)$$

Neste trabalho, iremos usar uma base de funções Hermite-Gauss, de valor real, e por isso não haverá distinção entre as duas representações.

Medição de modos ortogonais com filtros ajustados

Considere-se um feixe E composto de modos ortonormais ϕ_m numa cavidade laser,

$$E(x, y, t) = \sum c_m(t) \phi_m(x, y) \quad (6.2.12)$$

$$\langle \phi_m | \phi_{m'} \rangle = \delta_{mm'}. \quad (6.2.13)$$

e um filtro ajustado a um modo de medida,

$$\Psi_k = \phi_k. \quad (6.2.14)$$

Se tal feixe iluminar o holograma do modo ajustado, apenas esse modo vai contribuir para o sinal em $(u_\theta, 0)$, devido à ortogonalidade entre modos distintos:

$$\tilde{E}_t(u_\theta, 0) \approx \exp(-i\delta_k) \sum_m c_m \langle \phi_k | \phi_m \rangle = c_k \exp(-i\delta_k) \quad (6.2.15)$$

e a intensidade resultante é directamente proporcional à potência modal

$$I = \left| \tilde{E}_t(u_\theta, 0) \right|^2 = |c_k|^2. \quad (6.2.16)$$

Este é o resultado fundamental das técnicas holográficas de filtros ajustados propostas originalmente por (Golub, Prokhorov et al. 1982; Bartelt, Lohmann et al. 1983) e extensamente revistas em (Soifer and Golub 1994).

O principal inconveniente do método de filtros ajustados é a sensibilidade a desajustes entre os modos representados no filtro e os modos presentes no feixe, aliás comum à generalidade das técnicas coerentes de correlação óptica (Goodman 1996). Mesmo que os perfis modais do feixe sejam bem conhecidos, o método não distingue entre

misturas coerentes e misturas incoerentes de modos, pois é insensível à correlação intermodal $\overline{c_m c_{m'}}$. Para resolver estes problemas, propomos uma generalização do método holográfico descrita a seguir.

6.2.2 Interferência das componentes na base de medida

Imaginemos agora que o feixe, com campo transversal E , atravessa um holograma bimodal - soma de hologramas de dois modos numa base de medida Ψ_k e Ψ_l - em geral desajustada dos modos coerentes do campo:

$$T_{kl} = t_k(x, y) + t_l(x, y) \quad (6.2.17)$$

onde t_k e t_l são da forma (6.2.3).

O campo em $(u_\theta, 0)$ será agora, cf. equação (6.2.9), a soma das projecções do campo nos dois modos da base:

$$\tilde{E}_t(u_\theta, 0) = \exp(-i\delta_k) \langle \Psi_k | E \rangle + \exp(-i\delta_l) \langle \Psi_l | E \rangle. \quad (6.2.18)$$

A intensidade resultante pode escrever-se na forma (cap. 3, sec. 3.3.2)

$$I_{kl} = \langle \Psi_k | J | \Psi_k \rangle + \langle \Psi_l | J | \Psi_l \rangle + 2 \operatorname{Re} \left\{ \langle \Psi_k | J | \Psi_l \rangle e^{i\delta_{kl}} \right\} \quad (6.2.19)$$

onde J é a intensidade mútua na base de medida:

$$\langle \Psi_k | J | \Psi_l \rangle = \overline{\langle \Psi_k | E \rangle \langle E | \Psi_l \rangle}. \quad (6.2.20)$$

Se os hologramas (6.2.17) fossem ajustados a modos da cavidade, ie. se $\{\Psi\} = \{\phi\}$, os elementos da matriz intensidade mútua (6.2.20), usando (6.2.12), seriam as correlações intermodais da cavidade

$$\langle \phi_k | J | \phi_l \rangle = \overline{c_k c_l^*}. \quad (6.2.21)$$

A medição da interferência (6.2.19) e consequente medição dos elementos da matriz (6.2.21) permitiria discernir entre sobreposições coerentes e incoerentes de modos da cavidade.

Contudo, se as funções modais da cavidade não forem conhecidas, situação mais provável, podemos ainda assim assumir que a matriz de intensidade mútua admite uma expansão em modos (espacialmente) coerentes, como vimos no cap3 (sec. 3.3.1), da forma

$$\langle \Psi_k | J | \Psi_l \rangle = \sum_m \lambda_m \langle \Psi_k | \Phi_m \rangle \langle \Phi_m | \Psi_l \rangle, \quad (6.2.22)$$

onde Φ_m são modos coerentes ortogonais e descorrelacionados com potência relativa λ_m , i.e.

$$\langle \Phi_m | \Phi_{m'} \rangle = \delta_{mm'}. \quad (6.2.23)$$

e

$$\overline{c_m c_{m'}^*} = \lambda_m \delta_{mm'}. \quad (6.2.24)$$

O campo do feixe pode exprimir-se como uma expansão naqueles modos:

$$E(x, y, t) = \sum_m c_m(t) \Phi_m(x, y). \quad (6.2.25)$$

Como foi discutido no cap. 3 (sec. 3.2), para uma cavidade estável de espelhos esféricos, os modos coerentes coincidirão em geral com modos híbridos da cavidade (sobreposição coerente de modos espaciais degenerados em frequência).

6.2.3 Matriz de correlação e reconstrução do campo

Inversão de correlação: vectores e valores próprios

Como vimos na secção 3.2, a matriz de correlação (6.2.22) obedece à equação

$$\sum_l \langle \Psi_k | J | \Psi_l \rangle \langle \Psi_l | \Phi_m \rangle = \lambda_m \langle \Psi_k | \Phi_m \rangle. \quad (6.2.26)$$

cujos valores próprios são as potências dos modos coerentes e cujos vectores próprios são as componentes de tais modos nos elementos da base de medida. O campo transversal de cada modo coerente é então reconstruído pela expansão

$$\langle \rho | \Phi_m \rangle = \sum_k \langle \Psi_k | \Phi_m \rangle \langle \rho | \Psi_k \rangle. \quad (6.2.27)$$

A expansão espectral (6.2.22) e a equação de valores próprios (6.2.26) associada traduzem-se numa decomposição em valores singulares

$$\mathbf{J} = \sum_m \lambda_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H, \quad (6.2.28)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H, \quad (6.2.29)$$

onde $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal de valores próprios $\Lambda_{kk} = \lambda_k$ e \mathbf{U} é uma matriz cujas colunas são formadas pelos vectores próprios $\mathbf{u}_m : U_{km} = \langle \Psi_k | \Phi_m \rangle$.

Uma vez conhecidos os modos coerentes do feixe, a intensidade mútua entre dois pontos do plano transversal pode ser calculada escrevendo (6.2.26) na base das posições espaciais:

$$J(x, y; x', y') = \sum_k \lambda_k \Phi_k(x, y) \Phi_k^*(x', y'), \quad (6.2.30)$$

Em particular a irradiância, diagonal da intensidade mútua, será dada por

$$I(x, y) = \sum \lambda_k \left| \Phi_k(x, y) \right|^2. \quad (6.2.31)$$

Determinação da correlação a partir da intensidade

Debruçamo-nos agora sobre o problema prático de como calcular a matriz de correlação na base de medida a partir de medidas de interferência associadas.

Expressando a parte real da matriz de correlação em termos do seu módulo e fase, a equação de interferência (6.2.19) pode escrever-se, numa notação simplificada,

$$I_{kl}(\delta) = J_{kk} + J_{ll} + 2|J_{kl}| \cos \left[\text{Arg}(J_{kl}) + \delta \right]. \quad (6.2.32)$$

A figura 6.3 mostra a relação entre I e J .

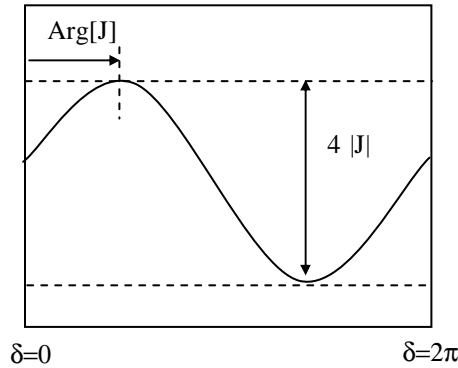


Fig. 6.3 Amplitude $|J|$ e fase $\text{Arg}[J]$ da intensidade mútua medida a partir da curva de interferência obtida por deslocamento de fase δ .

Na prática, a curva de interferência deve ser amostrada num número finito de pontos. É fácil ver que o número de graus de liberdade de uma curva de interferência no período de uma oscilação é três, correspondendo à amplitude, fase e valor médio. Por isso para cada curva de interferência (para cada par de funções da base de medida), é necessário efectuar pelo menos três medidas (embora o valor médio não nos interesse).

(i) Método das fases em quadratura

Medem-se apenas dois valores de fase, $\delta = 0$ e $\delta = \pi/2$, que permitem determinar a parte real e complexa dos elementos da matriz de correlação através de

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{J_{kl}\} &= \frac{I_{kl}(0) - J_{kk} - J_{ll}}{2} \\ \operatorname{Im}\{J_{kl}\} &= -\frac{I_{kl}(\pi/2) - J_{kk} - J_{ll}}{2} \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

desde que se conheçam os elementos diagonais, que podem ser determinados previamente, por exemplo através de

$$J_{kk} = \frac{I_{kk}(0)}{4}. \quad (6.2.34)$$

(ii) Método de ajuste polinomial trigonométrico (transformada de Fourier discreta)

Utilizam-se N valores de desvio de fase, que dividem o intervalo $]0, 2\pi]$ em N intervalos iguais:

$$\begin{aligned} I_{kl}(\delta_p) &= J_{kk} + J_{ll} + 2|J_{kl}|\cos[\operatorname{Arg}(J_{kl})], \\ \delta_p &= p \frac{2\pi}{N}, \quad p = 1, 2, \dots, N \geq 3 \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Os valores de intensidade são então ajustados a um polinómio trigonométrico (Mathews 1986) de ordem 1, que minimiza o desvio quadrático

$$\min \left[I_{kl}(\delta_p) - \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \delta_p + a_2 \sin \delta_p \right) \right]^2 \rightarrow a_0, a_1, a_2. \quad (6.2.36)$$

que equivale a efectuar uma transformada de Fourier discreta truncada na frequência fundamental dos dados. A parte real e imaginária de J é então dada por

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{J_{kl}\} &= \frac{a_1}{2} \\ \operatorname{Im}\{J_{kl}\} &= \frac{a_2}{2}\end{aligned}\quad (6.2.37)$$

Embora o método da quadratura seja conceptualmente mais simples, usamos o método de ajuste trigonométrico, por ser mais flexível uma vez que se pode ajustar o número de pontos de amostragem para minimizar o ruído (filtragem de Fourier dos dados).

6.3 Simulações numéricas

Estudamos aqui por meio de simulações numéricas os erros inerentes ao método de filtros ajustados, caso particular do método proposto, na medição de potências modais de um feixe. Seguidamente consideramos os modos Hermite-Gauss dos hologramas desajustados como uma base de representação incompleta para expandir o campo de forma aproximada. O método de correlação holográfica medirá os coeficientes de tal expansão.

6.3.1 Filtros “ajustados” desajustados

Se um feixe com M modos ϕ_k

$$E = \sum_i^M c_i \phi_i . \quad (6.3.1)$$

fosse detectado com um filtro representando um modo $\Psi_k \neq \phi_k$ com um perfil não ajustado ao correspondente modo do feixe, a intensidade medida seria

$$I_k = \left| \langle \Psi_k | E \rangle \right|^2 = \sum_{ij} \overline{c_i c_j^*} \langle \Psi_k | \phi_i \rangle \langle \phi_j | \Psi_k \rangle . \quad (6.3.2)$$

No caso particularmente simples em que os modos do feixe não são correlacionados

$$\overline{c_i c_j^*} = \delta_{ij}. \quad (6.3.3)$$

A intensidade detectada teria a contribuição de todos os modos além daquele que está a ser medido:

$$I_k = \sum_i^M |c_i|^2 \left| \langle \Psi_k | \phi_i \rangle \right|^2. \quad (6.3.4)$$

Erros de amostragem

Começamos por testar o efeito dos erros de discretização do holograma de amplitude. Assumiu-se por isso parâmetros de resolução espacial e quantificação semelhantes aos do modulador espacial que utilizamos (caracterizado no cap. 5): 600x600 elementos de 32μm x 32μm; 8 bits. O feixe simulado é composto por três modos Hermite-Gauss descorrelacionados, com raio do modo fundamental 2.5mm.

A figura 6.4 mostra a detecção de potências modais por um holograma multiplexado (detecção simultânea de três modos) no caso em que os modos de medição estão perfeitamente ajustados aos modos do feixe. O holograma foi modulado em amplitude, o que explica uma eficiência de difracção da ordem de 3%. A resolução do holograma limita os ângulos de difracção úteis a alguns mrad. As potências modais são medidas pelos valores centrais de intensidade das ordens de difracção correspondentes às frequências portadoras utilizadas para codificar holograficamente cada modo. Observar os pequenos desvios das potências medidas em relação às potências modais do feixe simulado.

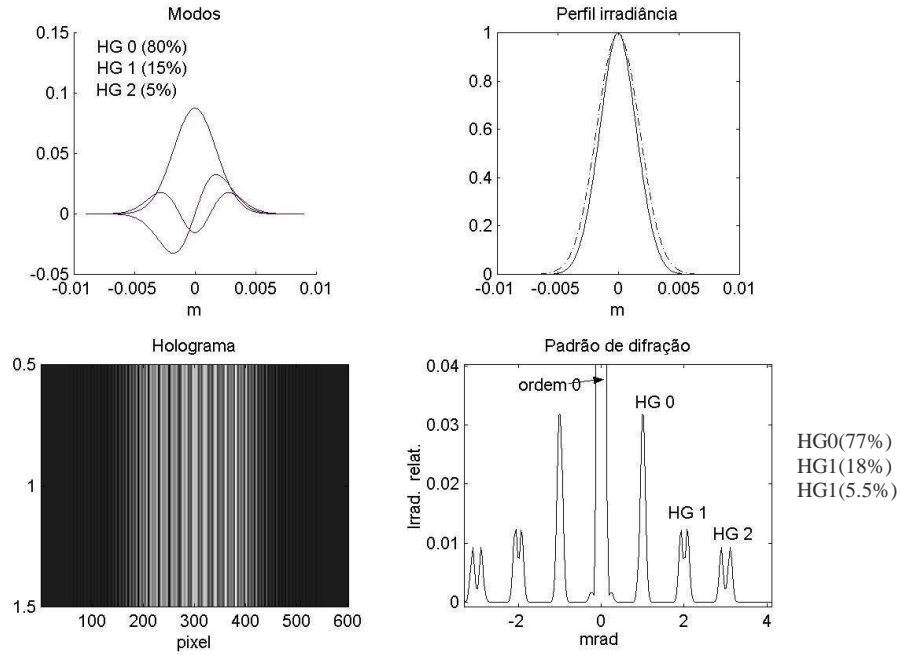


Fig. 6.4 Simulação 1-D de detecção modal holográfica: (a) modos Hermite-Gauss descorrelacionados do feixe; (b) perfil de intensidade vs. Gaussiana; (c) holograma de amplitude multiplexado; (d) pormenor do padrão de difracção; as potências são medidas pelos valores centrais dos picos de correlação.

Os requisitos de amostragem espacial são, se acordo com critério de Nyquist: i) a frequência de amostragem do modulador (inverso do espaçamento entre píxeis Δ) deve ser superior ao dobro da frequência das franjas portadoras (correspondente ao ângulo de difracção θ); ii) por sua vez, a frequência portadora deve ser superior à largura de banda espacial do feixe a medir. Para modos Hermite-Gauss, com raio do modo fundamental w_0 e ordem máxima M , estas condições traduzem-se em

$$\frac{1}{\Delta} > 2 \frac{\theta}{\lambda} > \frac{\sqrt{2M+1}}{w_0}. \quad (6.3.5)$$

Erros de desajuste de escala

Há três tipos de desajuste geométrico: escala, rotação, desvio (o desajuste de frente de onda é outro problema que não será abordado neste contexto). Vamos considerar o efeito do desajuste de escala e desprezamos todas as fontes de erro associadas à discretização do holograma.

Para um feixe com três modos Hermite-Gauss, de igual energia, a aplicação da fórmula. (6.3.4) conduz ao gráfico da fig. 6.5, que mostra o erro na medição das potências modais em função do desajuste do raio modo fundamental. Podemos ver que o erro é tanto maior quanto maior for a ordem (frequência espacial) do modo medido.

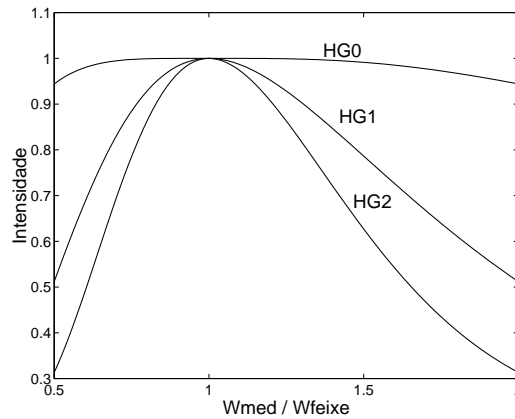


Fig. 6.5 Efeito calculado do desajuste do raio do modo fundamental na medição de potências modais com filtros “ajustados” dum feixe com três modos Hermite-Gauss (1-D) descorrelacionados e equipotentes.

6.3.2 Representação do campo numa base incompleta

Os efeitos de desajuste dos filtros holográficos podem ser compensados, se usarmos os modos de medida “perturbados” como uma base (incompleta) para expandir os modos do feixe. Tal expansão corrige a perturbação, se a base de medida contiver um número excedente de modos em relação ao número de modos presentes no feixe. O problema da medição de modos ajustados insere-se no problema mais geral da análise modal dum feixe

com perfis modais desconhecidos, que o método que apresentamos na secção 6.1 pretende resolver.

Até agora consideramos o conjunto de funções de medida $\{\Psi_k\}$ como sendo uma base completa, que contém uma infinidade de elementos. Na prática teremos de usar uma base finita e a questão que se põe é a de saber quantos elementos numa dada base devemos considerar. O mesmo tipo de problema se põe na caracterização da coerência espacial por meio de correlações de dois pontos: o campo deverá ser amostrado numa grelha finita de pontos. A escolha do número de modos dependerá numa estimativa da complexidade do campo analisado².

No entanto, em muitas situações, é possível fazer uma avaliação da natureza dos modos (simetria da cavidade laser) e da ordem máxima dos modos presentes no feixe (por exemplo através de medidas de M^2). Esse conhecimento a priori, mesmo que grosseiro, pode conduzir à escolha de uma base de determinadas funções com determinado número de elementos.

Para ilustrar este problema, consideremos um exemplo. Suponhamos que escolhemos uma base HG incompleta de ordem 5 (modos da ordem 0 até 5) com raio do modo fundamental 1.5 para representar modos HG de um feixe com um raio do modo fundamental unitário (fig. 6.6). Expandindo os modos do feixe nos modos da base incompleta,

$$HG_{mn}^{w=1} \approx \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 \langle HG_{kl}^{w=1.5} | HG_{mn}^{w=1} \rangle HG_{mn}^{w=1.5} \quad (6.3.6)$$

obtem-se uma representação satisfatória dos modos do feixe até à ordem 3, como ilustra a fig. 6.7.

² Dum ponto de vista de princípio não parece haver nenhuma vantagem em trabalhar numa base em vez de outra, se nada soubermos acerca do campo.

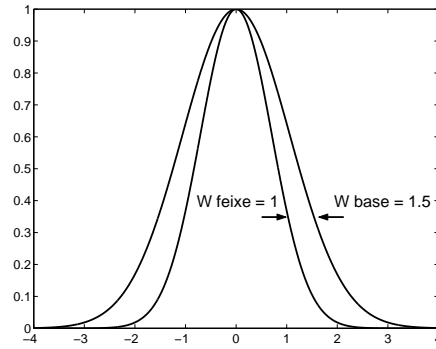


Fig. 6.6 Perfis dos modos fundamentais Gaussianos (normalizados) dum feixe e duma base de representação possível.

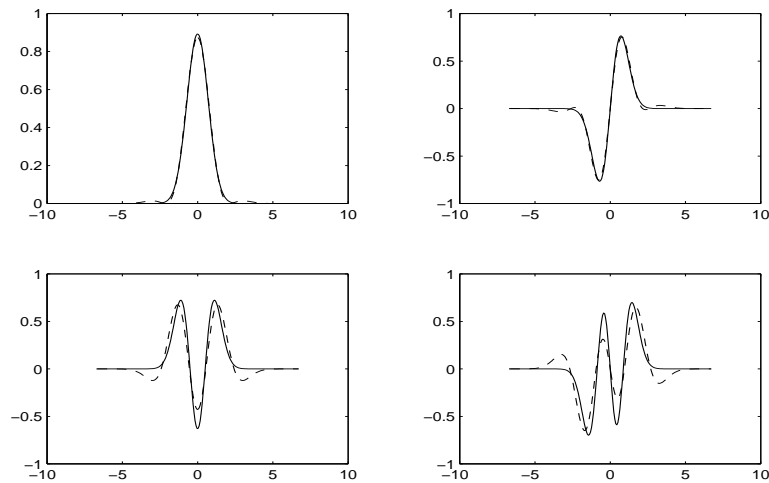


Fig. 6.7 Aproximação dos modos Hermite-Gauss com raio 1 até à ordem 3 por expansão numa base incompleta Hermite-Gauss de ordem 5 e com raio 1.5 (cf. fig. 6.6).

O problema da escolha adequada de uma base finita de representação do campo mereceria uma análise mais cuidada. Em favor de uma abordagem mais heurística, observamos apenas que se a escolha da base pode ser feita por uma avaliação prévia qualitativa do feixe; a suficiência dessa escolha pode ser verificada à posteriori, verificando se a composição modal encontrada para o feixe descreve adequadamente as suas características.

6.4 Análise modal transversa de um laser He-Ne

6.4.1 Montagem experimental

A figura 6.8 esquematiza a montagem óptica para a realização de hologramas modais gerados por computador. Esta montagem é uma associação de um difractor (montagem em linha com o feixe de entrada) com um sistema de formação de imagem do LCD e um interferómetro de desvio lateral (braço perpendicular).

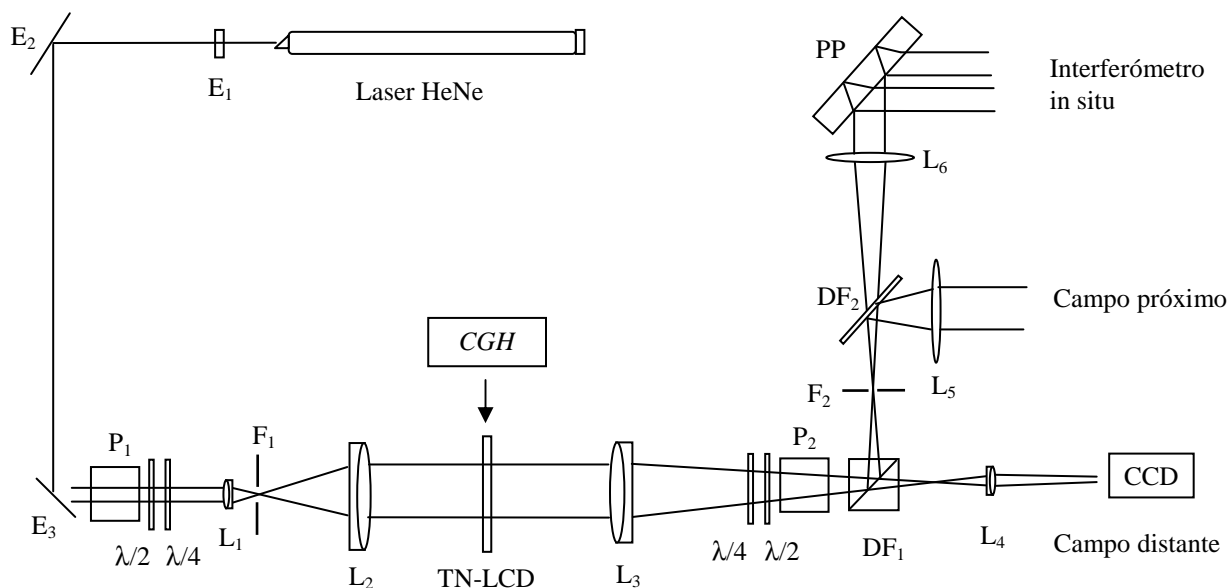


Fig. 6.8 Montagem óptica para geração e análise holográfica de modos transversos (ver símbolos na tabela 2). O TN-LCD é modulado com um holograma gerado por computador (CGH) que representa sucessivamente pares de modos na base de medida. O interferómetro in-situ serve para calibrar a modulação do LCD, que depende das polarizações de entrada e saída do modulador.

Tabela 6.2 Elementos ópticos da montagem da fig. 6.8.

E1	Espelho de saída ajustável do laser
E2, E3	Espelhos de alinhamento do feixe
L1; L2	Lente expansora; colimadora
L3	Lente de Fourier ($f=250\text{mm}$)
L4	Lente de magnificação do padrão de Fourier ($f=65\text{mm}$)
L5, L6	Lentes de formação de imagem ($f_5=65\text{mm}$, $f_6 \sim 200\text{mm}$)
P1, P2	Cubos polarizadores
DF1, DF2	Divisores de feixe
PP	Placa paralela: espessura = 5mm;
$\lambda/2$; $\lambda/4$	Lâminas retardadoras de meia onda; quarto de onda
F1, F2	Filtros espaciais

Para minimizar a aberração esférica, as lentes utilizadas no difractor são corrigidas (dobletos), incluindo as do expansor do feixe. O divisor de feixe DF1 é um cubo não polarizador (uma placa semi-espelhada introduz astigmatismo no foco da lente de Fourier, associado à forma em cunha da placa). Para mais detalhes sobre os cuidados para minimizar as aberrações ópticas do sistema, ver o Apêndice I.

Expansor de feixe

Para tirar partido da resolução do modulador, expandimos o feixe. O expansor é constituído por duas lentes corrigidas de aberração esférica e tem uma magnificação de 3.4. A colimação do feixe à saída do expansor foi verificada com uma *shear plate* [Melles Griot].

O diâmetro do feixe expandido corresponde a mais de 100 de píxeis do modulador. Para hologramas de amplitude com franjas de alguns píxeis, podemos representar o campo com uma resolução linear de algumas dezenas de elementos.

O expansor de feixe tem um filtro espacial opcional, útil para obter um feixe espacialmente coerente para o interferómetro de desvio lateral que mede in situ a modulação do LCD.

Modulador espacial

O modulador espacial consiste no painel TN-LCD entre elementos polarizador e analisadores elípticos e actua como rede de difracção dinâmica, controlada por computador, como foi explicado com detalhe no cap. 5. Para a aplicação presente o modulador foi calibrado como modulador de amplitude (fase constante).

Notar que os elementos do polarizador e analisador foram colocados em locais não expandidos do feixe, dada a secção pequena destes elementos relativamente ao LCD; em particular o analisador é colocado numa parte convergente do feixe embora o ângulo de convergência aí esteja dentro dos limites de tolerância de ângulo de aceitação das lâminas e cubo polarizador que o compõem.

Estágio de Fourier

O estágio de Fourier é uma lente corrigida de aberração esférica com 250 mm de distância focal. A distância do holograma (pupila de saída do LCD), idealmente no plano focal de entrada na lente não é crítica, pois como é sabido, um desvio introduz um factor de onda esférica na transformada de Fourier, sem alterar o padrão de intensidade.

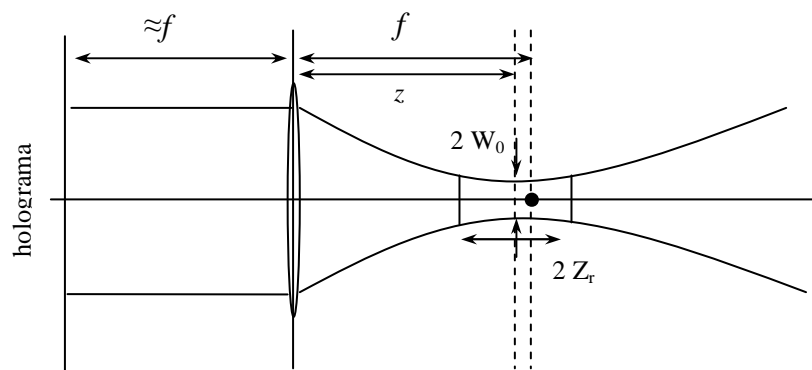


Fig. 6.9 Estágio de Fourier: localização $(x,y,z) = (\bullet)$ do centro do padrão de Fourier. O feixe é colimado antes do holograma entrada. Para um holograma de amplitude, o feixe que sai do holograma representado na figura corresponde a uma das duas bandas laterais de difracção.

Já o plano de Fourier, plano focal geométrico da lente é importante. Este plano tem um desvio desprezável em relação ao plano de máxima focagem para um feixe colimado à entrada (fig. 6.9):

$$\Delta f = f - z = \frac{Z_R^2}{z} \approx \frac{Z_R^2}{f} \ll Z_R. \quad (6.4.1)$$

Empiricamente, a posição axial do centro do padrão de Fourier foi definida como a correspondente à menor largura de feixe, enquanto a posição transversa foi determinada pelo centróide. Em geral um erro de posicionamento do ponto de medição lateral/longitudinal comparável ao raio/comprimento de Rayleigh do feixe, equivale a introduzir no feixe analisado um termo de fase linear/quadrático da ordem do comprimento de onda. A incerteza no posicionamento do ponto de medição deverá então ser

$$\begin{aligned} \Delta z &\ll Z_R \\ \Delta x &\ll W_0 \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Para um feixe de entrada expandido com raio da ordem de 2.5 mm, o diâmetro do feixe no foco seria (para um feixe Gaussiano puro) $\lambda f / \pi d \sim 20 \mu m$ correspondendo a cerca de 4 píxeis da câmara CCD ($\sim 5 \mu m$). Uma vez que estávamos interessados na localização precisa do centro do padrão de Fourier, magnificámos transversalmente o mesmo cerca de 10 vezes com uma lente de 65 mm de distância focal, com o plano objecto varrendo axialmente a região focal de Fourier, até se obter uma imagem do feixe no CCD com diâmetro mínimo.

Formação de imagem do LCD

O par de lentes L_3 - L_5 forma a imagem do feixe à saída do LCD: *campo próximo*. A imagem permite visualizar o feixe e os hologramas representados no LCD. Isto permite-nos avaliar as características do feixe e escolher uma base de representação adequada para os hologramas, antes da análise. Após a análise modal, a distribuição de intensidade registada é comparada com a prevista pela composição modal encontrada. O filtro espacial F_2 “despixeliza” a imagem do feixe.

Interferómetro de desvio lateral

O interferómetro de desvio lateral serve para calibrar e medir in-situ a resposta do modulador espacial pela técnica explicada em detalhe no capítulo 5 (secção 5.23). Consiste num interferómetro de *shearing* (placa paralela) com formação de imagem (lentes L₃-L₅). Esta montagem também permite avaliar qualitativamente a qualidade do feixe expandido.

Hologramas

Os hologramas são matrizes quadradas de 600×600 elementos, cada elemento corresponde a um pixel (i,j) do modulador. Para cada par (k,l) de funções da base de medida e para cada desvio de fase δ_p , calculamos um holograma de amplitude (ver cap.5, secção 5.3) igual à soma dos hologramas para cada uma das funções. O resultado é uma sequência de matrizes

$$t_{klp}(i, j) = t_k(\mathbf{p}_{ij}, 0) + t_l(\mathbf{p}_{ij}, \delta_p). \quad (6.4.3)$$

Para que as medidas de interferência sejam comparáveis, é essencial que todos os hologramas sejam normalizados globalmente:

$$\begin{aligned} t_{\min} &= \min \{t_{klp}(\mathbf{p}_{ij})\} \\ t_{\max} &= \max \{t_{klp}(\mathbf{p}_{ij})\} \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

$$T_{klp}(\mathbf{p}_{ij}) = \frac{t_{klp}(\mathbf{p}_{ij}) - t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}} t_{klp}(\mathbf{p}), \quad T \in [0,1]. \quad (6.4.5)$$

A não linearidade de modulação, com níveis de cinzento G de 8 bits, foi compensada com uma *lookup table* (LUT):

$$G_{klp}(\mathbf{p}_{ij}) = LUT[T_{klp}(\mathbf{p}_{ij})], \quad G \in \{1, 2, \dots, 255\}. \quad (6.4.6)$$

O ângulo de difracção dos hologramas de amplitude (frequência da portadora) foi escolhido para maximizar a frequência de amostragem do campo e ao mesmo tempo minimizar a interferência com ordens de difracção vizinhas associadas ao espaçamento Δ entre os píxeis do modulador (ver fig. 6.10). O ângulo óptimo escolhido foi 1/3 da frequência correspondente ao ângulo entre a ordens vizinhas: $\theta_c = \frac{1}{3} \lambda / \Delta$.

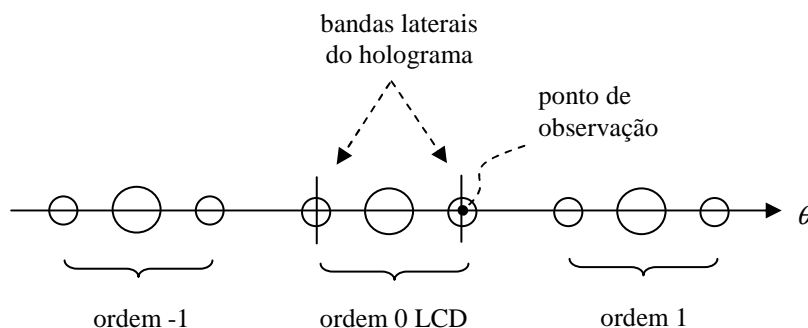


Fig. 6.10 Bandas de Fourier dum holograma de amplitude implementado com um modulador matricial (neste caso um LCD).

6.4.2 Feixe analisado e escolha da base de medida

Estimativa do parâmetro de raio do feixe

Estimamos o raio do modo fundamental do laser expandido. Para tal ajustamos o espelho de saída da cavidade de tal maneira que o feixe se parecesse o mas possível com uma Gaussiana. A figura 6.11 mostra o ajuste do perfil horizontal (integrado na vertical) do feixe no plano do LCD (desmagnificado por *imaging*) e no foco da lente de Fourier (magnificado por *imaging* cerca de 10x), com as escalas corrigidas dos factores de magnificação correspondentes.

A suposição de um feixe Gaussiano é confirmada pelo produto campo próximo (LCD) - campo distante (Plano de Fourier) para um feixe Gaussiano, com boa aproximação:

$$w_{LCD} w_{Fourier} = 2.6 \text{ mm} \times 20 \mu\text{m} = 0.052 \text{ mm}^2$$

$$\frac{\lambda f}{\pi} = 0.050 \text{ mm}^2 \quad . \quad (6.4.7)$$

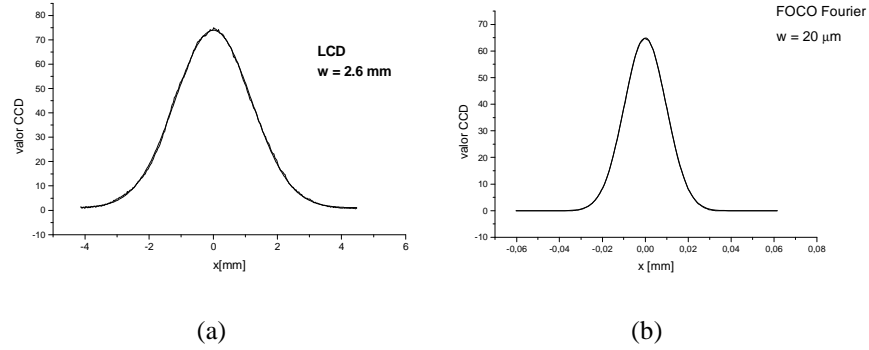


Fig. 6.11 Ajuste Gaussiano ao perfil de irradiância do (suposto) modo fundamental do feixe He-Ne:
(a) expandido no plano do LCD; (b) focado no plano de Fourier.

Feixe multimodo

Analizamos um feixe de um laser He-Ne de cavidade aberta. Tal laser não dispõe de qualquer abertura intra-cavidade para filtrar modos transversos superiores e é muito fácil, ajustando o espelho de acoplamento de saída da cavidade, observar modos transversos isolados ou feixes multimodo. Apesar de desconhecemos os raios de curvatura dos espelhos podemos apenas afirmar que a cavidade está numa configuração estável.

A figura 6.12 mostra a distribuição transversa de irradiância do feixe analisado expandido. Foi obtida formando a imagem da pupila de saída do modulador LCD. Embora se assemelhe a um modo Hermite-Gauss de ordem (1,0) rodado, é um pouco mais complicado. Notar em particular a ausência de um eixo de simetria, apesar de ser centrosimétrico, que, de acordo com a discussão no capítulo 2 - seção 2.3, indicia a presença de modos superiores degenerados em frequência que se adicionam coerentemente.

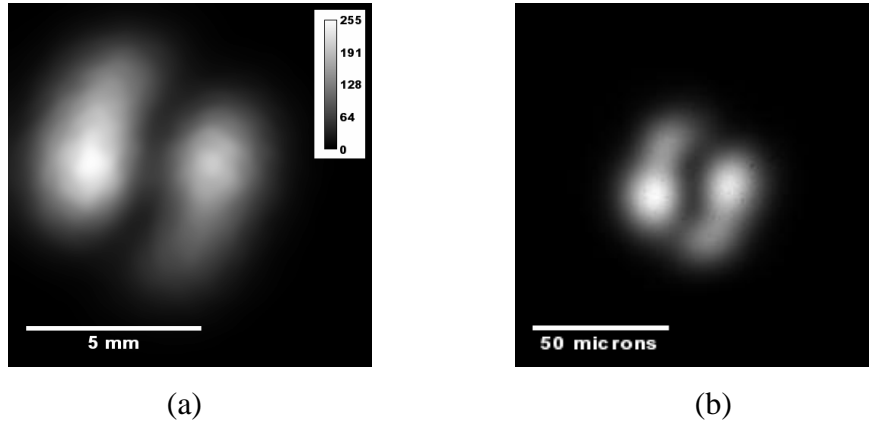


Fig. 6.12 Perfil transverso de irradiância do feixe analisado: (a) campo próximo (LCD);
(b) campo distante (plano de Fourier).

Base de medida

Escolhemos para representar o campo, uma base de medida Hermite-Gauss com raio $w_0(base) = 2.19 \text{ mm}$, cerca de 15 % inferior ao raio do modo fundamental estimado³. A ordem máxima dos polinómios de Hermite escolhida foi de 5, dando um total de $M=36$ elementos da base (fig. 6.13).

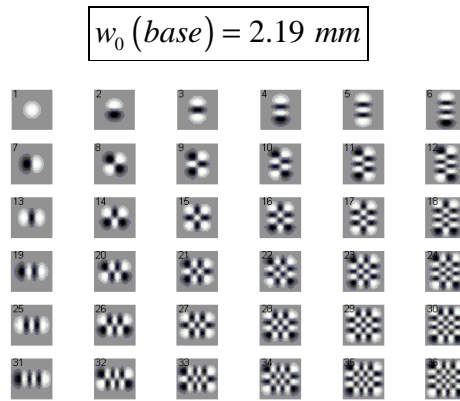


Fig. 6.13 Perfis dos 36 modos Hermite-Gauss da base de medida: numerados segundo a ordem:
[00], [01],...[55].

³ A escolha deste raio não foi ponderada, pois esperávamos que o método holográfico fosse razoavelmente insensível a desajustes da base. Na verdade, a medição do raio do modo fundamental foi feita à posteriori.

Número de medidas de interferência e tempo de aquisição

Para uma base de medida com N elementos e como a matriz de correlação é Hermítica, o número de elementos não redundantes da matriz de correlação, é

$$\#\{J_{kl}, k = 1, \dots, N, l \geq k\} = N \frac{N+1}{2}. \quad (6.4.8)$$

Para $N = 36$ e para três desvios de fase, o número total de medidas de interferências foi de $36 \times 37 / 2 \times 3 = 1998$. Como o software de controle gerava cerca de dois hologramas por segundo, o tempo total de aquisição foi de cerca de 15 minutos. O procedimento de aquisição automática de dados é descrito no Apêndice II.

6.4.3 Resultados

Interferência modal

A interferência entre pares de componentes do campo na base de medida é captada num CCD; para cada par adquirimos três interferogramas correspondentes a três valores de desvio de fase entre as componentes: 0 ; $2\pi/3$; $4/3\pi$. Apenas os valores centrais medem a interferência entre as projecções do campo. A posição do centro do padrão de difracção foi definida pelo centróide (admitindo um feixe centrosimétrico). Os valores de intensidade centrais foram registados para cálculo do elemento correspondente da matriz de coerência.

A fig. 6.14 ilustra um teste prévio de interferência entre as componentes $\langle [00] | E \rangle$ e $\langle [11] | E \rangle$ para um feixe quase Gaussiano $(00)^4$ mas com raio distinto do raio da base. Observar que o modo (00) tem componentes não nulas nos modos $[00]$ e $[11]$ da base desajustada e por isso observamos interferência entre estas componentes. A interferência é medida no centróide do padrão de difracção (marcado com uma cruz na figura).

⁴ Recordamos que usamos diferentes parênteses para distinguir modos da base de medida $[mn]$ de modos de cavidade (mn) .

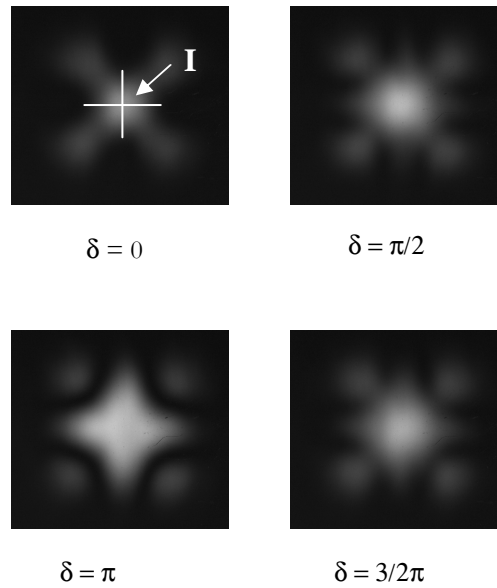


Fig. 6.14 Exemplo de interferência observada entre as componentes [00] e [22] (base Hermite-Gauss) dum feixe quase Gaussiano puro (00) mas com raio distinto do modo fundamental da base. Os valores centrais (indicado pela cruz) medem a interferência das componentes para várias fases relativas δ .

Matriz de correlação

As medidas de interferência entre todos os pares de componentes do campo na base de medida e o subsequente ajuste trigonométrico conduziram à matriz de correlação cujas partes real e imaginária estão ilustradas na fig. 6.15.

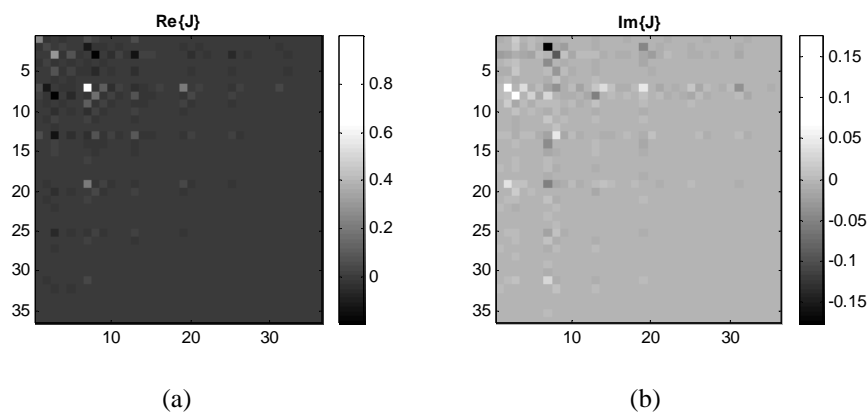


Fig. 6.15 Matriz de correlação J de todos os pares de elementos da base de medida:

(a) Parte real; (b) Parte imaginária.

Notar que dada a simetria Hermítica da matriz, apenas os termos não redundantes foram medidos. A parte real é simétrica; a parte imaginária é anti-simétrica.

Parece haver uma correspondência entre os valores salientes da parte real e da parte imaginária: essa correspondência deve-se apenas ao facto de quer a parte real quer a parte imaginária serem proporcionais à amplitude da correlação: onde a amplitude é baixa, ambas as partes serão baixas. Ressalta também que a parte real é em geral significativamente maior que a parte imaginária. No entanto existem termos imaginários não desprezáveis. Mais adiante discutiremos a origem destes termos. Entretanto salientamos que para extracção dos modos coerentes, diagonalizamos a matriz complexa, e não apenas a sua parte real.

Valores e vectores próprios

A figura 6.16 mostra a sequência de valores próprios, potências dos modos coerentes descorrelacionados, por ordem decrescente de energia. Constata-se a presença de três modos coerentes dominantes que abarcam 90% da energia do feixe. A restante fracção de 10% da energia aparece dispersa por modos que têm perfis erráticos e traduzem certamente ruído (ou melhor baixa relação sinal ruído).

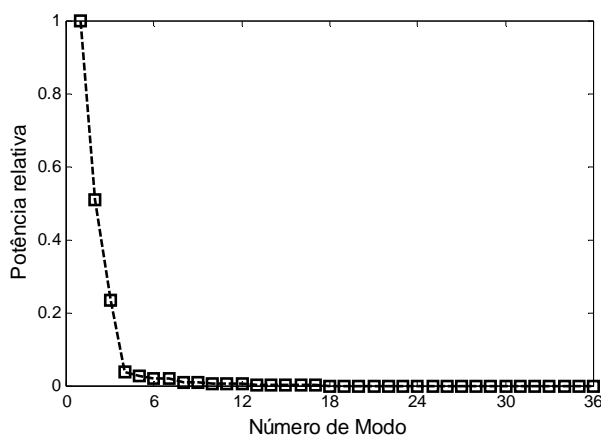


Fig. 6.16 Valores próprios normalizados da matriz de correlação.

Os modos são numerados segundo indicado na fig. 6.13.

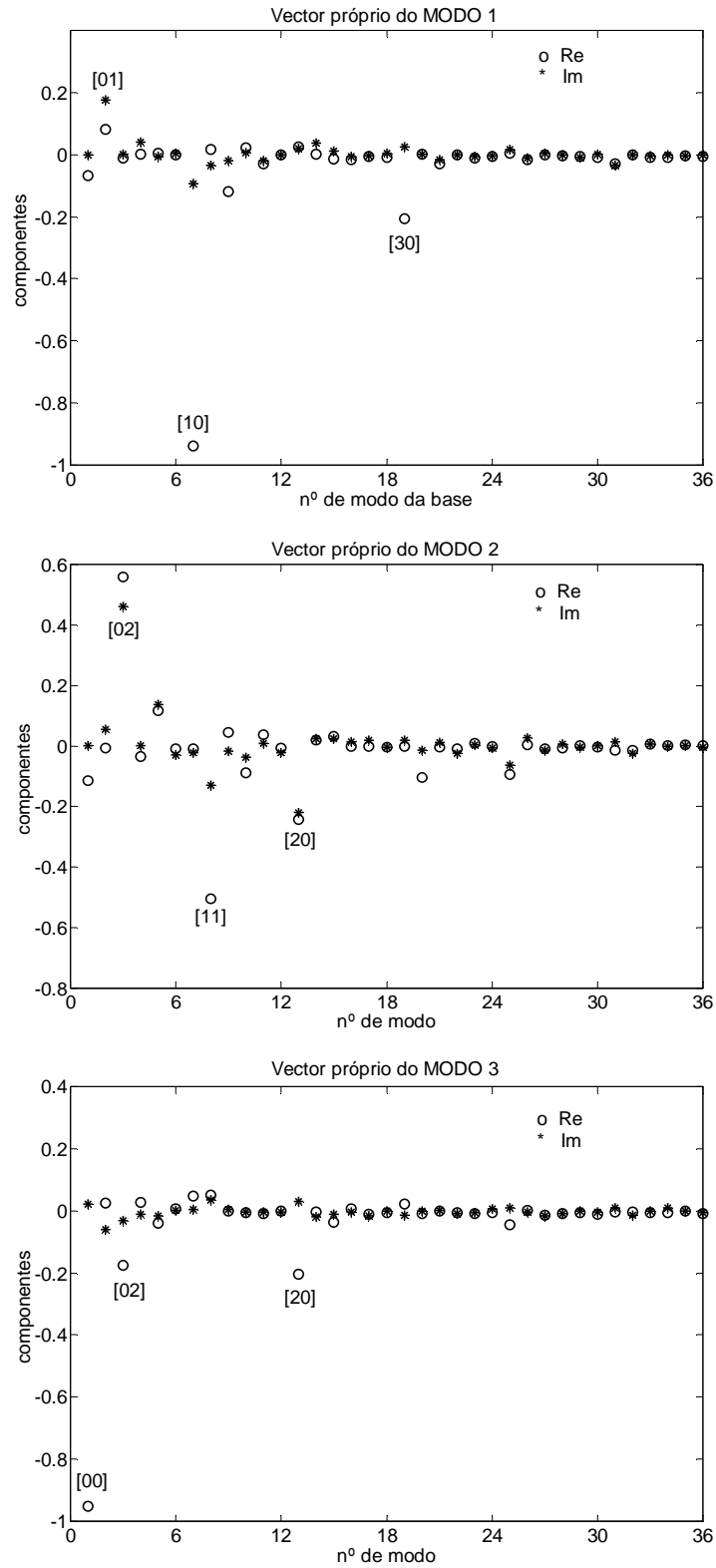


Fig. 6.17 Vectors próprios da matriz de correlação correspondentes aos três maiores valores próprios (cf. fig. 6.16).

Os valores próprios, coeficientes dos modos coerentes na base de medida, para os três modos com energias dominantes são visualizados na fig. 6.17. Assinalamos as componentes dominantes.

Para o primeiro modo, a componente dominante é a $[10]$; para o modo 2, $[11]$, $[02]$; para o modo 3, $[00]$. No entanto existe uma contribuição não desprezável de outras componentes. Por exemplo o terceiro modo tem uma contribuição importante das componentes $[02]$ e $[20]$, para além de $[00]$.

Notar ainda a contribuição significativa de componentes imaginárias, nomeadamente a componentes $[01]$ do modo 1, e $[02]$ e $[20]$ do modo 2.

É tentador pensar que as componentes evidenciadas correspondem a modos da cavidade: tal só seria verdade se a base de medida coincidissem com a base modal da cavidade. Como veremos numa análise mais detalhada, os modos coerentes encontrados podem ser interpretados, de forma consistente, como compostos de modos Hermite-Gauss duma cavidade estável mas com um raio do modo fundamental significativamente distinto do correspondente para a base de medida e com eixos de simetria ligeiramente rodados.

Perfis e pesos modais

A figura 6.18 mostra os perfis modais (intensidade e parte real da amplitude), para os três modos coerentes dominantes, e as correspondentes potências relativas.

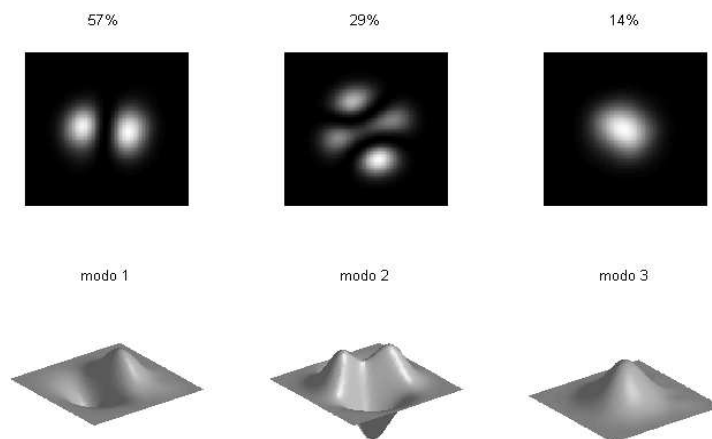


Fig. 6.18 Perfis dos três modos coerentes com maior energia: intensidade (em cima) e parte real da amplitude (em baixo).

Uma primeira interpretação dos padrões modais observados em termos dos modos da cavidade, assumindo que são Hermite-Gauss sugere o seguinte. O 1º modo é um modo (10), ligeiramente rodado; o 3º modo parece ser o modo fundamental (00), astigmático, enquanto o 2º modo poderá ser interpretado como uma combinação coerente entre modos (11) com modo degenerados com a mesma soma de índices transversos: (02) ou (20). Estas hipóteses foram confirmadas por uma análise mais detalhada, que expomos mais adiante.

Frentes de onda

A figura 6.19 mostra os perfis de fase, calculadas como

$$Fase\{\Phi\} = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}\{\Phi\}}{\text{Re}\{\Phi\}} \right]. \quad (6.4.9)$$

dos três modos coerentes encontrados. Os gráficos restringem-se ao domínio onde a amplitude dos modos é apreciável: definida pelo diâmetro do modo respectivo, quatro vezes o desvio padrão da irradiância. Fora deste domínio, onde as amplitudes são baixas, os perfis de fase divergem de forma anômala.

O perfil de fase do modo 1 é essencialmente um degrau com salto de π segundo uma linha nodal, como seria de esperar dum modo (10). O perfil do modo 3 é praticamente plano, como esperado para um modo (00), com desvio máximo da ordem de $5\%\pi$. Para o modo 2, o perfil apresenta um vórtice: seguindo uma linha periférica circular centrada, a fase sobe gradualmente 2π e cai abruptamente 2π , duas vezes numa volta completa.

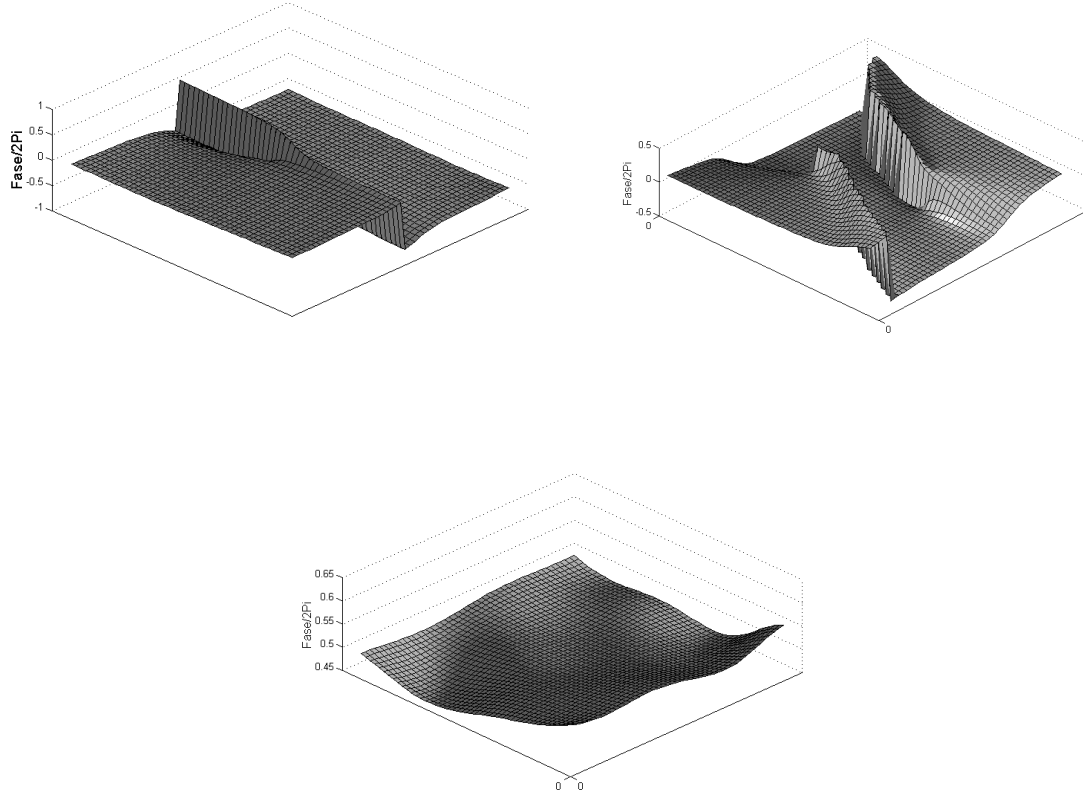


Fig. 6.19 Perfis de fase dos três modos coerentes com maior energia
(Domínio com dimensão $L_x * L_y = 4\sigma_x * 4\sigma_y$ para cada modo).

6.4.4 Discussão

Eixo nodais

A partir de experiências numéricas, induzimos⁵ que um modo Hermite-Gauss $HG_{mn}(\mathbf{p})$ num sistema de coordenadas \mathbf{p} pode sempre ser representado como um combinação linear de modos $HG_{m'n'}(\mathbf{p}')$ num sistema de coordenadas rodado \mathbf{p}' com $m + n = m' + n'$. Isto é compreensível, uma vez que uma cavidade esférica ideal não tem eixos de cartesianos naturais e qualquer escolha é adequada para representar o campo.

⁵ Não demonstramos formalmente este resultado.

Contudo numa cavidade real, perturbada por um elemento astigmático ortogonal os modos Hermite-Gauss só poderão oscilar segundo os eixos astigmáticos. No laser que analisamos observamos uma tendência para padrões com orientação mais ou menos coincidente com os eixos principais da janela de Brewster e na nossa análise vamos tomar esses eixos como “eixos naturais de oscilação”.

Origem da parte imaginária da matriz de correlação

Vimos no cap. 3 (sec. 3.4.2) que a correlação espacial de campo entre dois pontos transversos dum feixe contendo modos Hermite-Gauss híbridos é em geral complexa. Este resultado não depende da base de representação do campo. Para ver isto, consideremos um feixe com um modo coerente correspondente a um modo híbrido

$$|\Phi\rangle = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + \dots \quad (6.4.10)$$

com coeficientes a_i complexos. A matriz de correlação correspondente será

$$J_{kl} = \langle \Psi_k | J | \Psi_l \rangle = \langle \Psi_k | \Phi \rangle \langle \Phi | \Psi_l \rangle = \sum_m \sum_n a_m a_n^* \langle \Psi_k | \phi_m \rangle \langle \phi_n | \Psi_l \rangle, \quad (6.4.11)$$

que é, em geral, de valores complexos, mesmo sendo as projecções dos modos de cavidade na base de medida de valor real.

Há ainda a considerar valores imaginários residuais, associados a ruído nas medições, nomeadamente à aberração do feixe, produzida pela óptica imperfeita do sistema, que pode ser interpretada como um acoplamento coerente entre modos.

Análise de momentos

Fizemos uma análise do raio dos três modos dominantes, definido pelo segundo momento do padrão de intensidade, eq. (6.4.12), em função do ângulo do eixo de referência, como mostra a fig. 6.20.

O segundo do modo dominante, semelhante a um modo (10) ligeiramente rodado, é máximo para um desviado 5° da vertical, indicando uma possível rotação dos eixos nodais da cavidade em relação aos eixos da base (coincidentes com os eixos horizontal e vertical

do modulador). De facto, constatamos que a janela polarizadora de Brewster tinha eixos de simetria rodados em relação ao referencial do laboratório de um ângulo que estimamos entre 4 e 6°.

$$W_x = 2\sigma_x$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\int (x - x_c)^2 I(\rho) d\rho}{\int I(\rho) d\rho} . \quad (6.4.12)$$

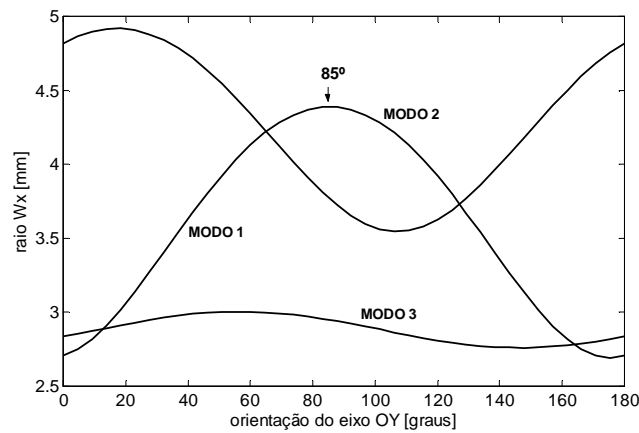


Fig. 6.20 Análise de segundo momento das irradiância para os três modos coerentes (fig. 6.18) em função do ângulo do eixo de referência.

A razão entre o raio máximo e mínimo do raio do 1º modo é de 1.81, um valor que difere menos de 5% de $\sqrt{2n+1}$ para $n=1$, indicando que aquele modo é o modo (10) da cavidade; além disso o raio mínimo é semelhante ao raio quase constante do 3º modo, confirmando também a hipótese do 3º modo corresponder ao modo (00) da cavidade. O raio do segundo modo não pode ser interpretado tão facilmente e corresponde como veremos a seguir a um modos híbrido de ordem $m + n = 2$.

Ajustes a perfis Hermite-Gauss

Modo 1

Ajustamos o perfil da amplitude (parte real) do primeiro modo segundo as suas direcções principais (-5° em relação ao referencial da base) aos perfis teóricos esperados para um modo Hermite-Gauss (1,0), como se vê na fig. 6.21. Um ajuste simultâneo das duas curvas, com o parâmetro raio do modo fundamental livre, conduziu a um raio do modo fundamental $w_{00} = 1.23w_{00}^{base} = 2.69mm$.

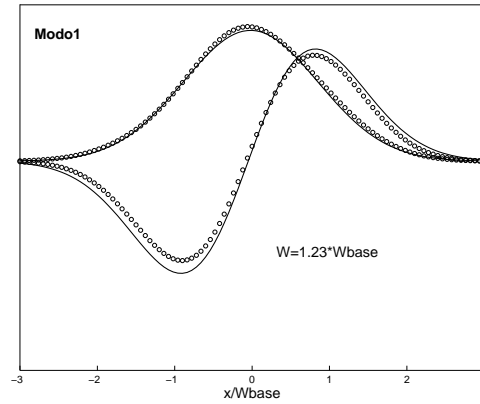


Fig. 6.21 Ajuste simultâneo dos perfis de irradiância segundo as direcções principais do primeiro modo coerente aos correspondentes perfis teóricos para um modo Hermite-Gauss (1,0).

Modo 2

O modo 2 apresenta semelhanças com um modo (1,1) mas é notoriamente distinto; assemelha-se mais a um modo híbrido $m + n = 2$ (cf. cap 2, sec. 2.4.3, fig. 11). Assumindo essa hipótese, exprimimos o 2º modo como uma combinação coerente de modos Hermite-Gauss degenerados,

$$\Phi_2 = \sum_{m+n=2} a_{mn} \phi_{mn}, \quad (6.4.13)$$

onde os coeficientes de expansão são calculados pelo integral de sobreposição:

$$a_{mn} = \langle \phi_{mn} | \Phi_2 \rangle = \int HG_{mn}(\mathbf{R}_{-5^\circ} \mathbf{p}, w_{00}) \Phi_2(\mathbf{p}) d\mathbf{p} . \quad (6.4.14)$$

Na expressão acima, o raio do modo fundamental w_{00} é um parâmetro de ajuste e usamos o sistema de referência suposto natural (definido pela janela de Brewster e coincidente com o eixo nodal modo 10, já ajustado ao 1º modo coerente). O cálculo dos integrais de projecção deu os coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0.6172 - 0.2217 i \\ a_{02} &= 0.5105 + 0.4573 i . \\ a_{02} &= -0.1769 - 0.2064 i \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

para um parâmetro óptimo (raio do modo fundamental) $w_{00} = 2.54mm$.

A fiabilidade do ajuste é confirmado pelo facto de representar 97% da energia do modo:

$$\begin{aligned} |a_{11}|^2 &= 0.4301 \\ |a_{02}|^2 &= 0.4697 \\ |a_{20}|^2 &= 0.0739 \\ |a_{11}|^2 + |a_{02}|^2 + |a_{20}|^2 &= 0.9737 . \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

A figura 6.22 compara a intensidade do modo 2 com a intensidade calculada admitindo a combinação de modos degenerados com os coeficientes (6.4.15). A figura 6.23 mostra a distribuição de fase para o mesmo ajuste.

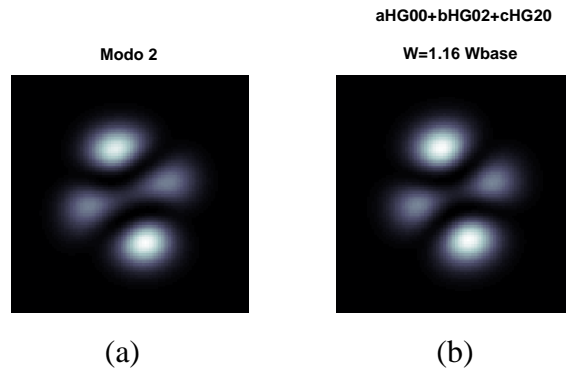


Fig. 6.22 Perfil transverso de intensidade do 2º modo coerente:
(a) medido; (b) ajuste do híbrido Hermite-Gauss $m+n=2$.

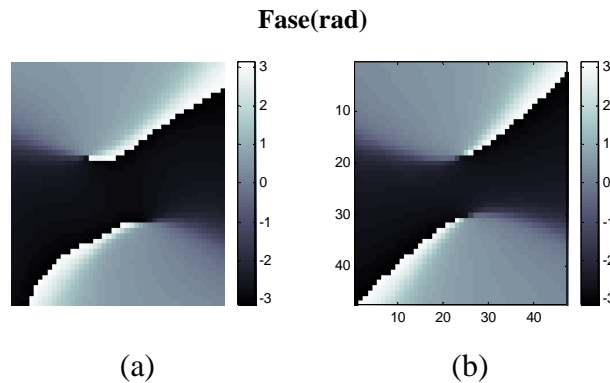


Fig. 6.23 Perfil transverso de fase do 2º modo coerente:
(a) medido; (b) ajuste dum híbrido Hermite-Gauss $m+n=2$.

Modo 3

O 3º modo coerente é essencialmente Gaussiano, mas ligeiramente astigmático. A fig. 6.24 mostra um ajuste de um perfil Gaussiano aos perfis ortogonais segundo as direcções com maior e menor raio. Os eixos astigmáticos não parecem ter qualquer relação com os eixos “naturais” da cavidade. Apesar deste ser o modo com frequências espaciais mais baixas e por isso mais fielmente representável com a nossa base incompleta de medida, a sua energia é baixa em comparação com os outros modos encontrados e provável que este astigmatismo, muito pequeno, seja um artefacto da medição.

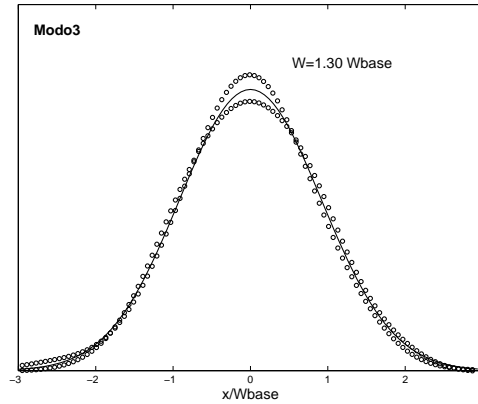


Fig. 6.24 Ajuste simultâneo dos perfis de irradiância segundo as direcções principais do terceiro modo coerente ao perfil teórico de um modo Hermite-Gauss (00).

Raio do modo fundamental medido

O raio estimado para o modo fundamental da cavidade (expandido), foi calculado como uma média dos três valores obtidos pelos ajustes de modos Hermite-Gauss aos três modos coerentes encontrados (fig.s 6.21-6.24):

$$w_{00} = 2.69 \pm 0.15 \text{ mm.} \quad (6.4.17)$$

O valor encontrado (com uma precisão de 6%) difere apenas 3% do valor medido independentemente, 2.6 mm, a partir dum ajuste de irradiância dum feixe Gaussiano puro proveniente da mesma cavidade com um ajuste diferente do espelho de acoplamento (cf. (6.4.7). Apesar disso o raio encontrado é 20% maior do que o raio escolhido para o modo fundamental da base de medida, 2.19 mm, confirmando assim não ser necessário, no método proposto, utilizar uma base com modos ajustados aos modos gerados pela cavidade.

Perfil de irradiância no campo próximo

Calculamos a distribuição transversa de intensidade do feixe reconstruído, somando a intensidade dos três modos coerentes dominantes encontrados. A fig. 6.25 compara a intensidade observada no LCD com a intensidade calculada a partir da análise modal. Em particular, salientamos que o método foi capaz de reproduzir correctamente a forma do

feixe, sem eixos de simetria, usando uma base de medida Hermite-Gauss com eixos de simetria segundo a horizontal e a vertical da figura.

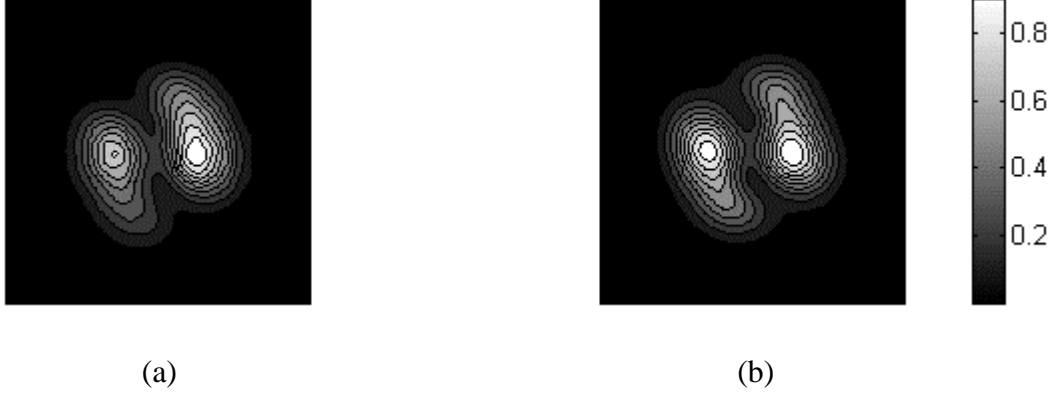


Fig. 6.25 Distribuição de intensidade do feixe: (a) observado no campo próximo (LCD); (b) calculado pela análise modal do campo.

Campo distante e M^2

Como decompusemos o feixe em modos Hermite-Gauss de uma cavidade estável de espelhos esféricos, a forma do feixe deve ser estacionária, como de facto parece ser, comparando o campo próximo e distante observado (fig. 6.12). Além disso, o resultado da análise modal efectuada deve ser capaz de prever a propagação do feixe, em particular o raio do feixe no campo distante.

O raio do feixe multimodo no campo próximo (LCD) e no campo distante (foco da lente de Fourier) estão relacionados por (com $f = 250$ mm e $\lambda = 633$ nm)

$$W_{x,y} W'_{x,y} = M_{x,y}^2 \frac{\lambda f}{\pi} \quad (6.4.18)$$

sendo M^2 é o factor de propagação associado ao factor de magnificação do feixe em relação ao modo fundamental (cap. 2, sec. 2.4.3)

$$M_{x,y} = \frac{W_{x,y}}{w}. \quad (6.4.19)$$

A expressão (6.4.19) permite-nos calcular directamente o factor de propagação a partir do segundo momento da intensidade do feixe reconstruído pela análise modal e do valor do raio do modo fundamental ajustado. O factor de propagação observado foi calculado a partir do segundo momento dos padrões de irradiância observados no campo próximo e no campo distante, usando a expressão (6.4.18). Os resultados estão sumariados na tabela 6.3.

Tabela 6.3 Raios de feixe e factor de propagação.

		Observado	Análise modal
Campo próximo [mm]	W_x	3.88	4.04
	W_y	3.36	3.49
Campo distante [μm]	W'_x	28.9	27.9 ± 3.1
	W'_y	26.5	24.1 ± 2.7
Factor de propagação	M_x^2	2.24	2.25 ± 0.26
	M_y^2	1.77	1.68 ± 0.19

6.5 Conclusão

Demonstramos um método holográfico de análise modal transversa baseado no conceito de correlação numa base espacial arbitrária e implementado por meio dum modulador espacial de luz. Um holograma, representando sucessivamente pares de funções da base, com fases relativas variáveis, permite medir a interferência entre as componentes do campo do feixe nos elementos da base. A inversão da matriz de correlação resultante, tem como vectores próprios os coeficientes da expansão dos modos espacialmente coerentes do feixe na referida base de representação e, como valores próprios, as potências relativas daqueles modos.

Conceptualmente, o método proposto generaliza dois dos principais métodos conhecidos de análise transversa: se as funções da base forem aberturas, o método é

equivalente à correlação de dois pontos; se apenas um modo da base é representado, o método reduz-se à técnica de filtros de correlação espacial.

Em relação ao método de filtros de correlação, até agora realizado apenas com hologramas estáticos multiplexados, o método proposto, sendo baseado em holografia dinâmica é mais flexível. Mais importante, os problemas associados a erros de desajuste, que afectam os correladores espaciais, são ultrapassados, pois a correlação bimodal proposta permite reconstruir os modos presentes no feixe como uma expansão dos modos representados no holograma.

A utilização duma base de funções espaciais modais, em oposição a aberturas, como no método de correlação de dois pontos, parece vantajosa. Por um lado, a fase da interferência pode ser medida trivialmente por deslocamento de fase das funções da base geradas por computador. Por outro lado, há uma redução efectiva do número de medidas de correlação, se os elementos da base constituírem uma aproximação razoável dos modos esperados no feixe analisado.

A análise dum feixe dum laser de He-Ne de cavidade aberta, que permitia o ajuste da composição modal transversa, conduziu a três modos coerentes, representando 90% da energia do feixe. Tais modos foram ajustados a modos de cavidade Hermite-Gauss isolados (TEM_{00} ; TEM_{10}) e um híbrido correspondendo à adição coerente de modos degenerados em frequência com ordem 2 ($TEM_{11} + TEM_{02} + TEM_{20}$). As medições de irradiância no campo próximo e distante confirmam a análise modal efectuada. Apesar de termos usado uma base Hermite-Gauss com raio e orientação estimada sem cuidados especiais para a cavidade ressonante do laser analisado, o raio do modo fundamental (TEM_{00}) encontrado foi significativamente (20%) maior que o raio do modo fundamental da base de medida, e concorda com o raio, estimado independentemente, para um feixe quase Gaussiano proveniente do mesmo laser com um erro de 3%. As direcções dos eixos nodais dos modos de cavidade ajustados, coincidem com as direcções principais da janela de Brewster, e diferem também significativamente (5°) das direcções principais dos modos da base de medida.

A redução do número efectivo de medidas de correlação, por um lado, e a facilidade de medição da fase da correlação, por outro lado, são factores de grande importância prática para a análise transversa de feixes. Os feixes multimodo são em geral não separáveis nas

coordenadas transversas e têm em geral uma correlação espacial complexa. O feixe que analisamos, por conter um modo híbrido sem eixos de simetria e com vorticidades de fase é um exemplo elucidativo.

Pela primeira vez foi efectuada uma análise modal transversa dum feixe laser a partir de medidas de coerência, bidimensional sem pressupor a decorrelação entre modos transversos da cavidade do laser. Também a utilização que demos a um modulador espacial dinâmico para análise modal de feixes é nova e abre possibilidades que seriam impraticáveis com elementos difractivos estáticos.

Sugestões para trabalho futuro

- A utilização de holografia dinâmica com um modulador espacial permite explorar métodos iterativos de análise transversa de feixes, possibilitando talvez o refinamento sucessivo da base de medida;
- Outras bases de medida poderiam ser testadas, e.g. polinómios de Zernike para análise de aberrações;
- A utilização de moduladores de maior resolução espacial evitaria a necessidade de expandir o feixe, simplificando a montagem e evitando a perturbação das frentes de onda modais (alteração do raio de curvatura, aberrações);
- A utilização de hologramas codificados em fase, em vez de em amplitude, aumentaria a eficiência difractiva, permitindo a análise de feixes de muito baixa potência;
- O tempo de aquisição poderia ser diminuído uma ou duas ordens de grandeza, utilizando hardware e software mais eficiente: modulador ferroeléctrico; detector fotodíodo (em vez da câmara CCD); software compilado.

Capítulo 7

Análise de coerência com difusão dinâmica de luz

Apresentamos um método para avaliar a coerência de um feixe laser baseado em difusão dinâmica de luz (DLS). Um feixe parcialmente coerente num volume difusor é modelado como a sobreposição de vários feixes coerentes nesse volume mas com coerência mútua arbitrária. Estabelecemos uma relação entre o contraste das flutuações temporais da intensidade difundida e a matriz de coerência dos feixes incidentes. O contraste de speckle é medido por autocorrelação da intensidade difundida. Como aplicações, medimos a coerência temporal de um feixe de um laser de Árgon bem como a sua coerência espacial global. A técnica proposta é insensível a vibrações mecânicas e não requer cuidados especiais no alinhamento.

Plano do capítulo

- 7.1 Introdução
- 7.2 Difusão dinâmica de luz parcialmente coerente
 - 7.2.1 Difusão dinâmica com detecção coerente
 - 7.2.2 Difusão dinâmica multi-feixe
 - 7.2.3 Amplitude dinâmica e coerência
- 7.3 Análise de coerência de um laser de Árgon
 - 7.3.1 Método experimental
 - 7.3.2 Medição do módulo do grau de coerência temporal
 - 7.3.3 Medição do grau de coerência espacial global
- 7.4 Conclusão

7.1 Introdução

A técnica comum para a medição da coerência temporal de feixes é a interferometria de Michelson, na qual um feixe interfere com uma sua cópia, obtida por divisão de amplitude e com atraso óptico relativo variável. A medição da visibilidade das franjas de interferência em função do atraso óptico fornece uma medida do módulo da função de coerência temporal. Aqui propomos que a coerência temporal pode ser avaliada interferindo os dois feixes após a difusão num meio aleatório dinâmico. Nesse caso a análise de visibilidade de franjas dá lugar à análise de contraste de speckle, podendo esta ser efectuada por autocorrelação de intensidade (Pereira, Ferreira et al. 2005).

Começaremos por estabelecer uma relação quantitativa entre o contraste de flutuações de speckle e a coerência do campo no volume difusor. Para tal, generalizamos a expressão de autocorrelação da intensidade de speckle, bem conhecida para um único feixe coerente no volume difusor, a um feixe parcialmente coerente, representado como a soma de N feixes com coerência mútua arbitrária. A medição da coerência temporal dum feixe constitui uma aplicação da teoria para o caso particular $N = 2$. Mostramos ainda que para um feixe com N modos espaciais, ortogonais e descorrelacionados, o contraste de speckle fornece uma medida directa do grau de coerência espacial global do feixe, medida útil e complementar às medidas do factor de propagação M^2 .

Experimentalmente utilizamos uma técnica habitual no estudo de meios dispersos por meio de difusão dinâmica de luz: espectroscopia de correlação de fótons com detecção por uma fibra monomodo (detecção coerente). A detecção por meio duma fibra monomodo evita a perda de contraste que estaria associada a detectores do tipo *pin-hole*, facilitando a medição de graus elevados de coerência. Por outro lado, a correlação de fótons permite obter medidas de grande precisão. Ilustramos o método caracterizando a coerência temporal e espacial global dum laser de Árgon.

7.2 Difusão dinâmica de luz parcialmente coerente

7.2.1 Difusão dinâmica com detecção coerente

Considere-se um feixe paraxial quase-monocromático¹

$$E(\mathbf{r}, t) = CA(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (7.2.1)$$

onde \mathbf{k} é o vector de propagação para o comprimento de onda central, $A(\mathbf{r})$ o perfil espacial do feixe² e C uma constante cujo quadrado é proporcional à potência do feixe. Se o feixe incide numa solução diluída de N partículas pequenas (tamanho $\ll \lambda$) idênticas em movimento aleatório, com posições dadas por

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(t), \quad j = 1, \dots, N. \quad (7.2.2)$$

Se o volume difusor for observado por uma fibra óptica monomodo, uma parte do campo difundido vai ser acoplada no modo da fibra

$$E_f(\mathbf{r}) = C_f B(\mathbf{r}) \exp(-\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}), \quad (7.2.3)$$

onde $B(\mathbf{r})$ é o perfil espacial¹ do modo de observação, definido pela fibra, e C_f uma amplitude que normaliza a potência do feixe de observação. Para difusão quasi-elástica, $|\mathbf{k}_s| = |\mathbf{k}|$.

Definindo o *perfil de difusão* $X(\mathbf{r})$

$$X(\mathbf{r}) \equiv A^*(\mathbf{r})B(\mathbf{r}). \quad (7.2.4)$$

e o usual *vector de difusão* \mathbf{q}

¹ O volume de coerência do feixe deve ser maior que o volume difusor.

² O perfil é uma quantidade adimensional cujo integral transversal é a área eficaz do feixe.

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{k} - \mathbf{k}_s, \quad (7.2.5)$$

a potência do campo acoplado no modo de observação será, para difusão simples, de acordo com (Ricka 1993)

$$J(t) = K |C|^2 \left| \sum_{j=1}^N X(\mathbf{r}_j(t)) \exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j(t)] \right|^2. \quad (7.2.6)$$

(K é uma constante proporcional à secção eficaz de difusão de uma partícula e ao ângulo sólido de captação do modo de observação).

A captação do sinal de difusão por uma fibra monomodo, expressa em (7.2.6) é chamada *deteccção coerente*, significando que o campo difundido por cada partícula é adicionado coerentemente no modo da fibra, com uma amplitude que depende da projecção do campo difundido pela partícula no modo de observação e uma fase que depende da posição da partícula projectada no vector de difusão (fig. 7.1).

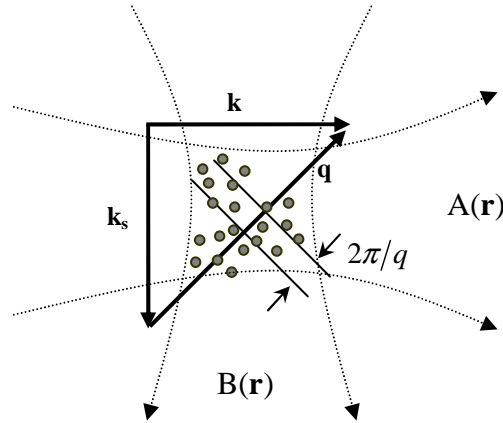


Fig. 7.1 Geometria da difusão dinâmica com detecção coerente. A e B são, respectivamente, os perfis espaciais do feixe incidente no meio e do modo coerente de observação.

Observe-se que um movimento colectivo de todas as partículas (e.g. vibração mecânica) introduz um factor de fase global no campo difundido não afectando o sinal dado por

(7.2.6). Apenas as posições relativas das partículas importam. O sinal óptico flutua com um tempo de correlação que é da ordem do tempo que as partículas difusoras levam a mover-se uma distância $1/q$:

$$\tau_D \sim \frac{2\pi}{|\mathbf{q}_a| \langle |\dot{\mathbf{r}}_j| \rangle}. \quad (7.2.7)$$

A autocorrelação de intensidade permite medir este tempo de correlação, que depende do tamanho das partículas, da viscosidade do meio e da temperatura, sendo a base de técnicas de caracterização de meios dispersos (Berne and Pecora 2000). Para esferas com um diâmetro de dezenas de nanômetros num meio aquosos, este tempo característico é da ordem dos milisegundos.

Iremos deduzir a expressão de autocorrelação no caso mais geral que nos interessa: um campo parcialmente coerente, que pode ser visto como a sobreposição de feixes espacialmente coerentes mas com uma coerência mútua arbitrária.

7.2.2 Difusão dinâmica multi-feixe

Considere-se um campo estatisticamente estacionário, dividido em M feixes paraxiais propagando-se num mesmo plano com polarização normal ao plano dos feixes

$$E_a(\mathbf{r}, t) = C_a(t) A_a(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}), \quad a = 1, \dots, M \quad (7.2.8)$$

Estamos a assumir que na região de interesse a dependência temporal é independente da posição ie que cada feixe é espacialmente coerente no volume de difusão.

A generalização evidente da expressão (7.2.6) para o sinal detectado devido à difusão de todos os feixes é

$$J(t) = K \left| \sum_{a=1}^M C_a(t) \sum_{j=1}^N X_a(\mathbf{r}_j(t)) \exp[-i\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{r}(t)] \right|^2 \quad (7.2.9)$$

Neste caso cada feixe define, pela intersecção com o modo de observação, um perfil de difusão X_a , como ilustra a fig. 7.2.

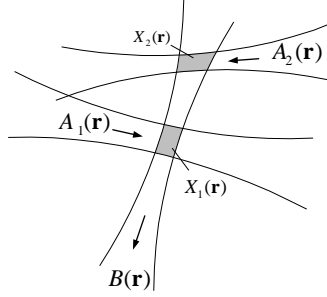


Fig. 7.2 A sobreposição dos perfis dos feixes incidentes

com o feixe de observação define diferentes volumes de difusão com perfis $X(\mathbf{r})$.

Definindo o factor de difusão

$$S_a(t) \equiv \sum_{j=1}^N X_a(\mathbf{r}_j(t)) \exp\{-i\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{r}_j(t)\}, \quad (7.2.10)$$

a expressão (7.2.9) pode escrever-se

$$J(t) = K \sum_{a,b=1}^M C_a(t) C_b^*(t) S_a(t) S_b^*(t), \quad (7.2.11)$$

O sinal óptico detectado flutua em duas escalas de tempo distintas: a escala de tempo das flutuação do campo (tempo de coerência), e a escala de tempo das flutuações do meio difusor. Iremos supor que a dinâmica do meio difusor é lenta em relação à dinâmica do campo ie. que $C_a(t)$ varia muito mais rapidamente que $S(t)$.

Intensidade detectada

Se usarmos um detector com tempo de amostragem T_s muito superior ao tempo de coerência do campo τ_c ³, mas inferior ao tempo de correlação do meio τ_D

³ Esta condição não é necessária mas corresponde às condições da nossa experiência.

$$\tau_c \ll T_s \ll \tau_d, \quad (7.2.12)$$

o sinal detectado, definido como

$$I(t) \equiv \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} J(t) dt, \quad (7.2.13)$$

será dado por

$$I(t) = K \sum_{a,b}^M \sqrt{I_a I_b} \gamma_{ab} S_a(t) S_b^*(t), \quad (7.2.14)$$

onde γ_{ab} é o grau de coerência mútua entre dois feixes a e b

$$\gamma_{ab} \equiv \frac{\overline{C_a(t) C_b^*(t)}}{\sqrt{|\overline{C_a(t)}|^2 |\overline{C_b(t)}|^2}} = \frac{\overline{C_a(t) C_b^*(t)}}{\sqrt{I_a I_b}}. \quad (7.2.15)$$

Durante T_s o meio parece “congelado”.

Autocorrelação de intensidade

A autocorrelação da intensidade detectada (7.2.14), para um atraso τ , é

$$\overline{I(t) I(t + \tau)} = K^2 \sum_{abcd}^M \sqrt{I_a I_b I_c I_d} \gamma_{ab} \gamma_{cd} \overline{S_a(t) S_b^*(t) S_c(t + \tau) S_d^*(t + \tau)}, \quad (7.2.16)$$

onde a média temporal é efectuada num intervalo muito superior ao tempo de difusão do meio. Os factores de difusão S_a definidos em (7.2.10) são variáveis aleatórias Gaussianas complexas circulares com média nula, quando (Goodman 2000)

- i) N é grande;
- ii) $X_a(\mathbf{r}_j)$ é identicamente distribuída para todos os j ;
- iii) $X_a(\mathbf{r}_j)$ e $\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{r}_j$ são estatisticamente independentes;
- iv) As fases $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j$ estão uniformemente distribuídas em $(-\pi, \pi)$.

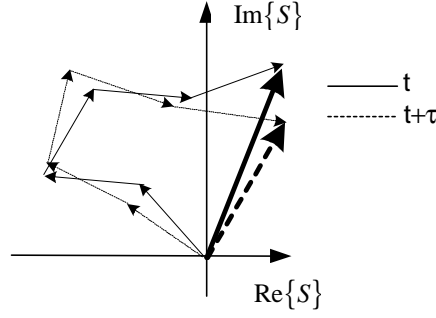


Fig. 7.3 A difusão de cada partícula contribui com um fasor aleatório para o factor de difusão S .

A condição (i) verifica-se quando é grande o número de partículas no volume de difusão V_a (Ricka 1993)

$$V_a \equiv \int |X_a(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}, \quad NV_a \gg 1 \quad (7.2.17)$$

A condição (ii) verifica-se para partículas independentes e as condições (iii)-(iv) são verificadas quando o comprimento de onda de difusão for muito menor que o tamanho do volume de difusão:

$$q_a^{-1} \ll V_a^{\frac{1}{3}}. \quad (7.2.18)$$

Aplicando o teorema dos momentos para variáveis complexas Gaussianas (Goodman 2000), as correlações de quarta ordem podem traduzir-se em termos de correlações de segunda ordem:

$$\overline{S_a(t)S_b^*(t)S_c(t+\tau)S_d^*(t+\tau)} = \frac{\overline{S_a(t)S_b^*(t)}}{\overline{S_c(t+\tau)S_d^*(t+\tau)} + \overline{S_b^*(t)S_c(t+\tau)}} \overline{S_a(t)S_d^*(t+\tau)}. \quad (7.2.19)$$

Assumindo que o sistema é estacionário, a expressão anterior pode escrever-se como o valor esperado de correlações entre um instante $t=0$ e $t=\tau$:

$$\overline{S_a(t)S_b^*(t)S_c(t+\tau)S_d^*(t+\tau)} = \langle S_a(0)S_b^*(0) \rangle \langle S_c(0)S_d^*(0) \rangle + \langle S_a(0)S_d^*(\tau) \rangle \langle S_b(0)S_c^*(\tau) \rangle^* \quad (7.2.20)$$

que contém unicamente termos da forma $\langle S_a(0)S_b^*(\tau) \rangle$, alguns dos quais com $\tau = 0$.

Usando a expressão de S (7.2.10) e separando os N termos $i=j$ dos $N(N-1)$ termos $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \langle S_a(0)S_b^*(\tau) \rangle &= \sum_j^N \langle X_a(\mathbf{r}_j(0)) \exp(-i\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{r}_j(\tau)) X_b^*(\mathbf{r}_j(\tau)) \exp(i\mathbf{q}_b \cdot \mathbf{r}_j(\tau)) \rangle \\ &+ \sum_j^N \langle X_a(\mathbf{r}_j(0)) \exp(-i\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{r}_j(0)) \rangle \sum_{k \neq j}^N \langle X_b^*(\mathbf{r}_k(\tau)) \exp(i\mathbf{q}_b \cdot \mathbf{r}_k(\tau)) \rangle. \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

Considerando que $N-1 \approx N$, reconhecemos na última parcela o produto $\langle S_a(0) \rangle \langle S_b^*(\tau) \rangle = 0$.

Além disso, sendo as partículas estatisticamente idênticas, a primeira parcela restante é

$$\langle S_a(0)S_b^*(\tau) \rangle = N \langle X_a(\mathbf{r}_j(0)) \exp(-i\mathbf{q}_a \cdot \mathbf{r}_j(\tau)) X_b^*(\mathbf{r}_j(\tau)) \exp(i\mathbf{q}_b \cdot \mathbf{r}_j(\tau)) \rangle. \quad (7.2.22)$$

Como estamos interessados em tempos de atraso τ da ordem do tempo de correlação durante o qual uma partícula se desloca uma distância de cerca de $1/q$, suposta muito menor que o tamanho do volume de difusão, (7.2.18), faremos a aproximação $X_a(\mathbf{r}_j(\tau)) \approx X_a(\mathbf{r}_j)$.

Além disso, devido à independência entre posições actuais das partículas \mathbf{r} e deslocamentos $\Delta\mathbf{r}(\tau) \equiv \mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}$ as correspondentes médias factorizam:

$$\langle S_a(0)S_b^*(\tau) \rangle = N \langle X_a(\mathbf{r}_j(0)) X_b^*(\mathbf{r}_j(0)) \exp[(\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_a) \cdot \mathbf{r}] \rangle \langle \exp(-i\mathbf{q}_a \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau)) \rangle. \quad (7.2.23)$$

Usando as definições dos perfis e vectores de difusão, a expressão acima pode escrever-se

$$\langle S_a S_b^*(\tau) \rangle = \frac{N}{V} \left[\iiint_V |B(\mathbf{r})|^2 E_a(\mathbf{r}) E_b^*(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \right] \langle \exp(-i\mathbf{q}_a \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau)) \rangle \quad (7.2.24)$$

onde V é o volume do meio difusor e a densidade de partículas N/V é suficientemente grande para se aproximar o somatório pelo integral.

A expressão (7.2.24) dá-nos a correlação dos factores de difusão entre dois feixes a e b , que é nula sempre que os respectivos campos, pesados pelo modo de observação, são *ortogonais em volume* (projectão volúmica nula), o que acontece em três situações interessantes:

- 1) Volumes de difusão separados $X_a^* X_b \approx 0$;
 - 2) Direcções de propagação muito distintas $(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b)^{-1} \ll V_{a,b}^{1/3}$;
 - 3) Modos ortogonais dum mesmo feixe $\iint E_a E_b^* dx dy = 0$ e $B \approx B(z)$.
- (7.2.25)

Se considerarmos apenas feixes ortogonais em volume no sentido definido por (7.2.25), a expressão (7.2.24) reduz-se ao caso em que $a = b$. Usando a definição de volume de difusão dada atrás, resulta

$$\langle S_a S_b^*(\tau) \rangle = \frac{N}{V} V_a \langle \exp(-i\mathbf{q}_a \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau)) \rangle \delta_{ab} \quad (7.2.26)$$

Substituindo (7.2.26) em (7.2.20), a autocorrelação de intensidade (7.2.16) resulta em

$$\overline{I(t)I(t+\tau)} = K^2 \sum_{a,b}^M N_a I_a N_b I_b \left[1 + |\gamma_{ab}|^2 \langle e^{i\mathbf{q}_a \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau)} \rangle \langle e^{-i\mathbf{q}_b \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau)} \rangle \right] \quad (7.2.27)$$

O valor médio da intensidade, usando (7.2.26) em (7.2.26), é dado por

$$\overline{I(t)} = K \sum_a^M N_a I_a. \quad (7.2.28)$$

A autocorrelação normalizada, de (7.2.27) e (7.2.28), é

$$g^{(2)}(\tau) \equiv \frac{\overline{I(t)I(t+\tau)}}{\overline{I(t)}^2} = 1 + \sum_{a,b}^M f_a f_b |\gamma_{ab}|^2 \left\langle e^{i\mathbf{q}_a \cdot \Delta \mathbf{r}_j(\tau)} \right\rangle \left\langle e^{-i\mathbf{q}_b \cdot \Delta \mathbf{r}_j(\tau)} \right\rangle, \quad (7.2.29)$$

onde introduzimos as fracções de intensidade difundida por cada feixe em relação à intensidade total difundida

$$f_a \equiv \frac{N_a I_a}{\sum_a^M N_a I_a}; \quad \sum_a^M f_a = 1. \quad (7.2.30)$$

Relação de Siegert

No caso de um único feixe, a expressão (7.2.29) reduz-se ao resultado familiar na área da difusão dinâmica de luz coerente

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left| \left\langle e^{i\mathbf{q} \cdot \Delta \mathbf{r}_j(\tau)} \right\rangle \right|^2, \quad (7.2.31)$$

que tem a forma conhecida por relação de Siegert (Berne and Pecora 2000),

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \beta_0 \left| g^{(1)}(\tau) \right|^2, \quad (7.2.32)$$

relacionando a autocorrelação de intensidade com a autocorrelação do campo $g^{(1)}(\tau)$ válida em geral para processos Gaussianos. $\beta_0 (\leq 1)$ é um factor que contabiliza a perda de contraste das flutuações de intensidade devido a condições experimentais não ideais, que serão discutidas mais adiante.

Meio Browniano

O caso simples de partículas em suspensão pode ser frequentemente modelado pela estatística *Browniana*. Neste regime, a probabilidade dum desvio $\Delta \mathbf{r}$ num tempo τ é (Sethna 2006)

$$p(\Delta r, \tau) = \left(\frac{1}{4\pi D\tau} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta r^2}{4D\tau}} \quad (7.2.33)$$

sendo D é o coeficiente de difusão das partículas, dado pela famosa relação de Stokes-Einstein

$$D = \frac{K_B T}{6\pi\eta r_H} \quad (7.2.34)$$

onde K_B é a constante de Boltzman, T a temperatura absoluta, r_H o raio hidrodinâmico das partículas em solução e η a viscosidade do solvente.

A função de autocorrelação da intensidade difundida é então

$$g^{(1)}(\tau) = \int_V p(\Delta \mathbf{r}, \tau) e^{i\mathbf{q} \cdot \Delta \mathbf{r}} d^3 \Delta \mathbf{r} = e^{-Dq^2\tau} \quad (7.2.35)$$

e a autocorrelação de intensidade

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \beta_0 e^{-\frac{2\tau}{\tau_{dif}}} \quad (7.2.36)$$

onde

$$\tau_{dif} \equiv \frac{1}{q^2 D} \quad (7.2.37)$$

é o tempo característico do decaimento da função exponencial que define a escala de tempo em que as partículas percorrem uma distância q^{-1} (que, exceptuando as medições de difusão quase-frontal, é da ordem de grandeza de λ). A autocorrelação de intensidade para os M feixes incidentes no meio difusor Browniano é então

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \sum_{a,b}^M f_a f_b |\gamma_{ab}|^2 e^{-D(q_a^2 + q_b^2)\tau} \quad (7.2.38)$$

7.2.3 Amplitude dinâmica e coerência

A amplitude dinâmica de difusão é usualmente definida como

$$\beta \equiv g^{(2)}(0) - 1. \quad (7.2.39)$$

que é igual à variância normalizada da intensidade difundida,

$$\beta = \frac{\overline{I^2}}{\bar{I}^2} - 1 = \frac{\sigma_I^2}{\bar{I}^2}. \quad (7.2.40)$$

Do resultado (7.2.38), a amplitude dinâmica para a difusão de M feixes é dada por

$$\beta = \sum_{a,b}^M f_a f_b |\gamma_{ab}|^2, \quad (7.2.41)$$

um resultado notavelmente simples.

No caso em que todos os feixes são coerentes (ou quando apenas existe um feixe), a amplitude dinâmica é unitária e o desvio padrão da intensidade é igual à intensidade média como esperado para uma fonte Gaussiana (a luz difundida pelo meio dinâmico é pseudo-térmica)

$$\begin{aligned} |\gamma_{ab}| &= 1 \Rightarrow \\ \beta &= \sum_{a,b}^M f_a f_b = 1. \\ \sigma_I^2 &= \bar{I}^2 \end{aligned} \quad (7.2.42)$$

enquanto que no caso extremo oposto em que todos os feixes são mutuamente incoerentes, a amplitude dinâmica é sempre inferior à unidade e a variância da intensidade é a soma das variâncias de cada feixe:

$$\begin{aligned}
|\gamma_{ab}| &= \delta_{ab} \Rightarrow \\
\beta &= \sum_a^M f_a^2 < 1 \\
\sigma_I^2 &= \sum_a^M I_a^2.
\end{aligned} \tag{7.2.43}$$

Coerência espacial

Um feixe incidente com M modos transversos descorrelacionados ortogonais pode ser tratado como M feixes incoerentes no nosso modelo, desde que a 3ª condição (7.2.25) seja satisfeita, o que acontece para uma observação transversalmente uniforme i.e. quando o modo de observação é bastante mais largo do que o feixe incidente (fig. 7.4).

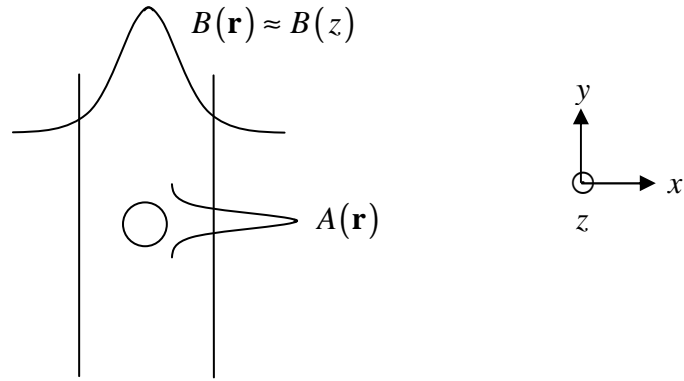


Fig. 7.4 Conceito de observação transversalmente uniforme. O perfil do modo de observação B é muito mais largo que o perfil A do feixe incidente e por isso é quase uniforme na sua secção transversa onde A é significativo. Z é a direcção de propagação do feixe incidente.

Para um feixe com uma distribuição modal de potências relativas λ_m , e para uma observação uniforme, a amplitude dinâmica é dada por (7.2.43) com $f_m = \lambda_m$

$$\beta = \sum_{m=1}^M \lambda_m^2. \tag{7.2.44}$$

Se usarmos a variância σ_λ^2 da distribuição de potência modais,

$$\sigma_{\lambda}^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \lambda_m^2 - \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \lambda_m \right)^2, \quad (7.2.45)$$

e como $\sum_{m=1}^M \lambda_m = 1$, a amplitude dinâmica (7.2.44) pode escrever-se

$$\beta = \frac{1}{M} + M \sigma_{\lambda}^2 \geq \frac{1}{M}, \quad (7.2.46)$$

verificando-se a igualdade para uma distribuição uniforme de potências. O inverso da amplitude dinâmica é assim uma medida do número mínimo de modos transversos presentes no feixe (ou, se quisermos, o número efectivo de modos uniformemente distribuídos em potência).

Factor de coerência global

Mostraremos agora que a amplitude dinâmica, na condição de observação transversalmente uniforme, mede o *grau de coerência global* (transversa), definido como (Hodgson and Weber 2005)

$$K^2 \equiv \frac{\int |\Gamma(\mathbf{\rho}_1, \mathbf{\rho}_2)|^2 d\mathbf{\rho}_1 d\mathbf{\rho}_2}{\int \Gamma(\mathbf{\rho}_1, \mathbf{\rho}_1) d\mathbf{\rho}_1^2 \int \Gamma(\mathbf{\rho}_2, \mathbf{\rho}_2) d\mathbf{\rho}_2^2}, \quad (7.2.47)$$

onde $\Gamma(\mathbf{\rho}_1, \mathbf{\rho}_2)$ é a função de coerência mútua entre dois pontos do plano transversal ao feixe. O factor K^2 é uma medida simples de coerência transversal que pode ser usado como complemento ao factor de propagação M^2 , permitindo discriminar entre feixes parcialmente coerentes ($K^2 > 1$ e $M^2 > 1$) e feixes coerentes com aberrações ($K^2 = 1$ e $M^2 > 1$).

Suponhamos um feixe com coerência transversal parcial. Como vimos no cap. 3 (sec 3.2.2), tal feixe admite em geral uma decomposição em modos espacialmente coerentes $\Phi_m(\mathbf{\rho})$, ortogonais e descorrelacionados com potências λ_m , sendo então a coerência mútua transversal

$$\Gamma(\mathbf{\rho}_1, \mathbf{\rho}_2) = \sum_m \lambda_m \Phi_m(\mathbf{\rho}_1) \Phi_m^*(\mathbf{\rho}_2). \quad (7.2.48)$$

Inserindo a expansão (7.2.48) na expressão (7.2.47) e usando a ortogonalidade entre modos, concluímos que o grau de coerência global é dado por

$$K^2 = \frac{\sum_m \lambda_m^2}{\left(\sum_m \lambda_m \right)^2}. \quad (7.2.49)$$

Se considerarmos potências relativas (ou o que é equivalente $\sum \lambda_m = 1$), o resultado (7.2.49) é idêntico à amplitude dinâmica de difusão calculada atrás (7.2.44).

Coerência temporal

Considere-se um feixe espacialmente coerente (um modo transverso) mas com coerência temporal arbitrária⁴ dividido em amplitude em dois feixes que incidem na amostra difusora com um atraso óptico relativo T_{12} . Se os volumes de difusão ou direcções de propagação forem distintos, no sentido definido por (7.2.25), condição (1) ou (2), o resultado (7.2.41) será válido e a amplitude dinâmica será então

$$\beta = f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 \left| \gamma(T_{12}) \right|^2. \quad (7.2.50)$$

sendo $\gamma(T)$ é a autocorrelação normalizada do campo do feixe, ou grau de coerência temporal. Usando (7.2.40), o resultado anterior pode ser expresso em termos da variância da intensidade do campo difundido

$$\sigma_I^2 = \bar{I}_1^2 + \bar{I}_2^2 + 2\bar{I}_1 \bar{I}_2 \left| \gamma(T_{12}) \right|^2, \quad (7.2.51)$$

onde \bar{I}_1 e \bar{I}_2 são as intensidades médias difundidas pelos feixes (1) e (2) isoladamente.

No caso do feixe dividido ser composto por M modos transversos ortogonais, cada modo pode ser visto como um feixe e o resultado (7.2.41) pode ser aplicado se para cada

⁴ O comprimento de coerência deve contudo ser maior que o tamanho do volume de difusão.

par de modos se verificar a condição de ortogonalidade em volume (7.2.25): a condição (2) verifica-se para dois modos propagando-se em direcções distintas (pertencentes um a cada feixe dividido); para um par de modos do mesmo feixe dividido, a condição (3) reduz-se à condição de ortogonalidade entre modos transversos, se o modo de observação abarcar o feixe incidente (tiver raio muito maior). Nestas condições, sendo f_1 e f_2 as fracções de potência dos dois feixes divididos e λ_m a potência relativa do modo m , a aplicação da fórmula (7.2.41) aos $2M$ feixes (M modos em cada um dos dois feixes divididos) resulta em

$$\beta = \sum_{a,b=1}^2 \sum_{m,n=1}^M (f_a \lambda_m)(f_b \lambda_n) |\gamma_{mn}(T_{ab})|^2. \quad (7.2.52)$$

onde $\gamma_{mn}(T_{ab})$ é o grau de coerência entre o modo m do feixe a e modo n dos feixe b , e T_{ab} é o atraso relativo entre os feixes a e b . Se os modos transversos são descorrelacionados, a sua coerência mútua é

$$\gamma_{mn}(T_{ab}) = \gamma_m(T_{ab}) \delta_{mn}. \quad (7.2.53)$$

Inserindo (7.2.53) em (7.2.52) resulta

$$\beta = \beta_0 \left[f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 \left\langle |\gamma(T_{12})|^2 \right\rangle \right], \quad (7.2.54)$$

com

$$\beta_0 = \sum_{m=1}^M \lambda_m^2 \quad (7.2.55)$$

$$\left\langle |\gamma(T_{12})|^2 \right\rangle = \frac{\sum_{m=1}^M \lambda_m^2 |\gamma_m(T_{12})|^2}{\sum_{m=1}^M \lambda_m^2}.$$

β_0 é um factor que traduz a perda de contraste de flutuações de intensidade devida à coerência espacial parcial no volume de difusão. $\left\langle |\gamma(T_{12})|^2 \right\rangle$ uma média do módulo quadrado da coerência temporal dos modos transversos, pesada pelos quadrados das

potências modais.

Observe-se que para um meio com alargamento não homogêneo, um modo transversal com maior perda na cavidade terá um menor número de modos longitudinais associados e por conseguinte uma função de coerência mais larga. No entanto, como a média $\langle |\gamma(T_{12})|^2 \rangle$ é pesada pelo quadrado das potências modais, para um feixe dominado pelo modo fundamental, com função de coerência $\gamma_0(T)$ a expressão (7.2.54) é em boa aproximação dependente apenas do espectro longitudinal do modo fundamental:

$$\lambda_0 \approx 1 \Rightarrow \beta \approx \beta_0 \left[f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 |\gamma_0(T_{12})|^2 \right]. \quad (7.2.56)$$

O caso mais geral em que o feixe de observação não abarca os feixes incidentes é mais complicado e as expressões (7.2.55) envolvem explicitamente os perfis espaciais dos modos dos feixes incidentes e do feixe de observação (Pereira, Ferreira et al. 2005).

7.3 Análise de coerência de um laser de Árgon

A teoria apresentada que estabelece a relação entre a amplitude dinâmica da autocorrelação de intensidade em difusão dinâmica de luz (DLS) e a coerência dentro do volume de difusão foi testada na análise de coerência temporal e espacial dum laser de íões Ar⁺: na sec. 7.3.1 determinamos a função de coerência temporal normalizada; na sec. 7.3.2 medimos a coerência espacial global.

7.3.1 Montagem experimental

Sistema óptico

O sistema montado (fig. 7.6) é semelhante ao utilizado na técnica DLS convencional com um feixe. A principal diferença é o uso de um polarizador para dividir a luz da fonte em

dois feixes com um atraso relativo variável entre 0 e ~30cm (1ns) imposto por um prisma móvel. A polarização horizontal do feixe transmitido pelo polarizador é rodada 90° por uma lâmina de meia onda de modo a coincidir com a polarização vertical do feixe reflectido. Os dois feixes incidem na amostra com direcções opostas e têm ambos polarização perpendicular ao plano de incidência (fig. 7.5).

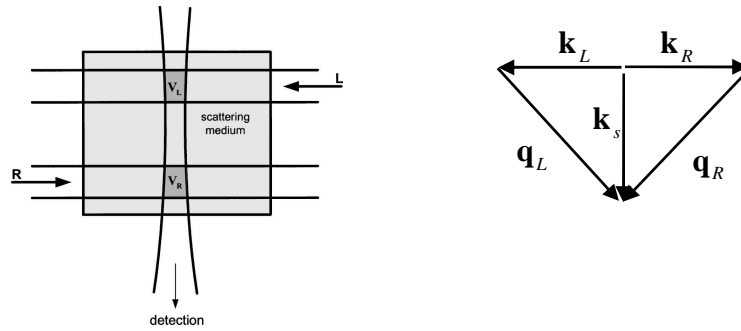


Fig. 7.5 Geometria de difusão usada. (a) os feixes direito (R) e esquerdo (L) definem dois volumes de difusão V_R e V_L . (b) vectores de onda dos feixes incidentes (\mathbf{k}_R , \mathbf{k}_L), do modo de observação (\mathbf{k}_s) e de difusão (\mathbf{q}_R , \mathbf{q}_L).

A amostra usada é a solução diluída de esferas de látex de 50 nm de diâmetro (0.01% vol.). A luz difundida a 90° da direcção de incidência é acoplada a uma fibra óptica monomodo com uma lente GRIN. A lente define um diâmetro do modo de detecção de 400 μm enquanto o diâmetro dos feixes de incidentes é de 1.4 mm. A observação do feixe não é neste caso transversalmente uniforme (cf. fig. 7.4). No entanto, como o feixe analisado é essencialmente TEM_{00} e por isso com uma coerência espacial elevada, esperamos que o resultado (7.2.50) se verifique com boa aproximação.

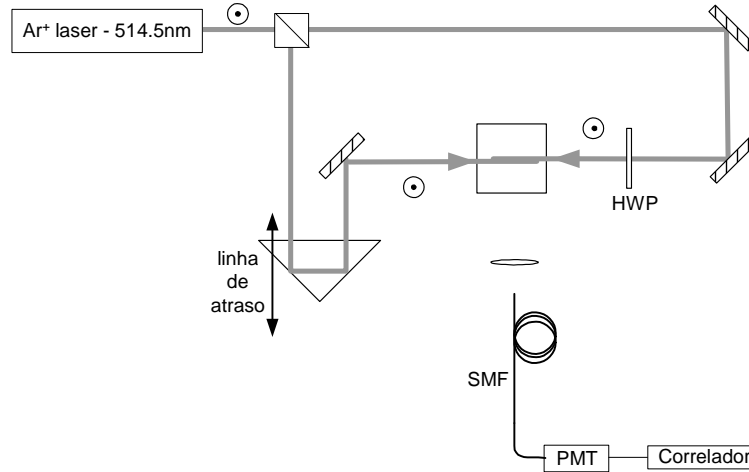


Fig. 7.6 Sistema óptico usado para a determinação da função de coerência temporal por difusão dinâmica de dois feixes obtidos por divisão de amplitude do feixe da fonte.

Foto-correlador

O sinal transmitido pela fibra é detectado com um fotomultiplicador ALV-SIPC-II com um tempo morto de $t_{dead} = 30 \text{ ns}$. A autocorrelação das foto-contagens é feita por um correlador electrónico ALV-500/E com um tempo de atraso inicial de 125 ns.

A autocorrelação da contagem de fotões $n(t)$ está correlacionada com a autocorrelação de intensidade $g^{(2)}(\tau)$ através de (Chu 1991)

$$\frac{\langle n(t)n(t+\tau) \rangle}{\langle n(t) \rangle^2} = g^{(2)}(\tau) + \frac{1}{\langle n(t) \rangle} \delta(\tau), \quad (7.3.1)$$

sendo τ é o tempo de atraso entre canais. O último termo representa o efeito do *shot-noise* que afecta unicamente a autocorrelação na origem: $\delta(\tau > 0) = 0$; $\delta(0) = 1$. Por causa deste termo, a gama dinâmica é obtida pelo limite da autocorrelação para um tempo de atraso tendente para zero e não nulo:

$$g^{(2)}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle n(t)n(t+\tau) \rangle}{\langle n(t) \rangle^2}. \quad (7.3.2)$$

O correlador calcula a autocorrelação automaticamente. A amplitude dinâmica é obtida por extrapolação (método dos cumulantes) da autocorrelação para um tempo de atraso nulo.

7.3.2 Medição do módulo do grau de coerência temporal

Procedimento experimental

A fracção de potência de cada feixe foi determinada medindo a foto-contagem com o outro feixe bloqueado. A gama dinâmica máxima β_0 foi calculada como a média da gama dinâmica para cada feixe isolado. A duração de cada medida de autocorrelação foi de 30 s, muito superior ao tempo característico de correlação do meio (\sim ms). Para cada tempo de atraso ΔT , foram efectuadas cinco medidas de amplitude dinâmica para alcançar uma precisão nas medidas de 0.5%.

A figura 7.7 mostra três exemplos de medidas de autocorrelação para três casos: feixes mutuamente coerentes ($\Delta T \ll \tau_{coer}$) mutuamente incoerentes ($\Delta T \gg \tau_{coer}$) e para um caso intermédio (feixes mutuamente parcialmente coerentes). Tal como esperado a amplitude dinâmica no caso incoerente cai para metade do seu valor no caso coerente. Observe-se ainda que a amplitude dinâmica máxima (caso coerente) é ligeiramente inferior a 1, traduzindo o referido factor de Siegert global β_0 , cuja origem será discutida mais adiante.

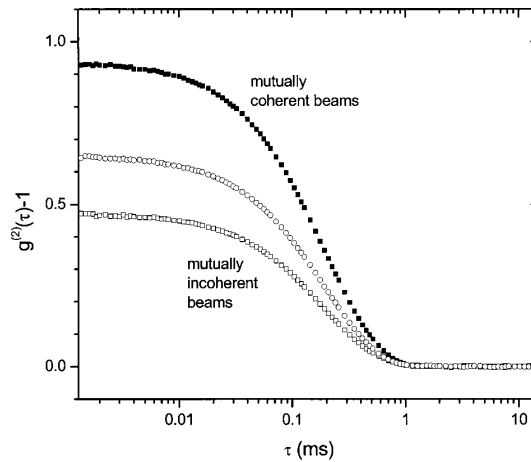


Fig. 7.7 Autocorrelação normalizada medida para três valores de atraso óptico entre os dois feixes.

Amplitude dinâmica

Para a geometria da figura 7.5, os vectores de difusão são idênticos em magnitude e a expressão da autocorrelação é dada por

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \beta_0 \exp\left(-2\frac{\tau}{\tau_D}\right) \left[f_R^2 + f_L^2 + 2f_R f_L |\gamma(T_{RL})|^2 \right]. \quad (7.3.3)$$

onde f_R e f_L são as fracções de potência dos feixes incidentes direito e esquerdo, $\gamma(T)$ a função de autocorrelação do campo cujo módulo pretendemos medir em função do atraso $T = \Delta T_{RL}$. O tempo de correlação característico $\tau_D = (q^2 D)^{-1} \sim 10^{-3} s$ é muito superior ao tempo de coerência esperado para o laser. β_0 é um factor global de Siegert que traduz nomeadamente a imperfeita coerência espacial do feixe ou factores instrumentais como não linearidades na detecção.

A figura 7.8 mostra, para cada tempo de atraso entre os dois feixes experimentado, a amplitude dinâmica obtida por extrapolação para a origem da autocorrelação, $\beta = g^{(2)}(0) - 1$, a precisão associada (desvio padrão) e o tempo de correlação do meio.

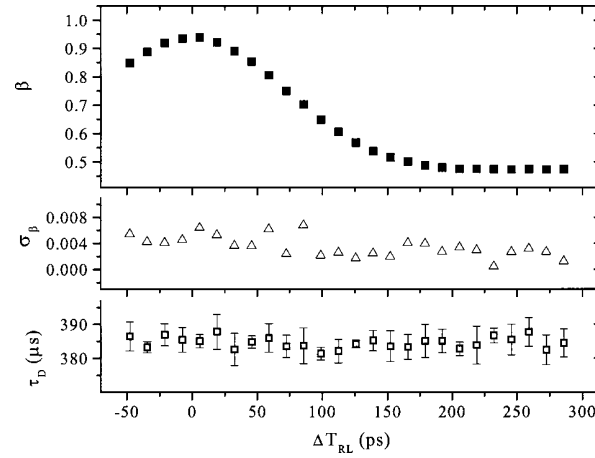


Fig. 7.8 Amplitude dinâmica medida $\beta(\Delta T_{RL})$ da luz difundida para o laser de Ar+ com corrente de 43A e correspondente desvio padrão σ_β . O gráfico inferior mostra medidas do tempo de correlação do meio τ_D .

Ajuste a modelo de coerência

No laser de Ar^+ há um elevado número de modos longitudinais (>20) em oscilação sob a curva de ganho. Como o meio activo é gasoso, o alargamento espectral deve-se quase exclusivamente ao efeito Doppler, tendo portanto um perfil Gaussiano. Desprezando a largura de linha de cada modo longitudinal, o espectro de intensidade do laser é aproximado por um pente de frequências de ressonância para as quais o ganho excede as perdas da cavidade, cada uma com uma amplitude que corresponde à diferença entre a curva Gaussiana de ganho e o nível das perdas (ganho limiar).

O ganho α da cavidade à frequência ν_m para um alargamento Doppler centrado na frequência ν_0 com largura $\Delta\nu_{Dop}$ satura de acordo com (Yariv 1997)

$$\alpha(\nu_m) = \frac{\alpha(\nu_0)}{\left[1 + I(\nu_m)/I_{Sat}\right]^{1/2}} \exp\left\{-\ln(2)\left[2(\nu_m - \nu_0)/\Delta\nu_{Dop}\right]^2\right\}, \quad (7.3.4)$$

onde I_{Sat} é a intensidade de saturação da transição e $\alpha(\nu_0)$ é o ganho central para pequenas intensidades I . Assim a intensidade de cada uma das linhas espectrais será aproximada por

$$I(\nu_m) = I_{Sat} \left(R^2 \exp\left\{-2\ln(2)\left[2(\nu_m - \nu_0)/\Delta\nu_{Dop}\right]^2\right\} - 1 \right). \quad (7.3.5)$$

onde R é a razão entre o ganho central não saturado e a perda total da cavidade. É então fácil mostrar que a autocorrelação do campo normalizada, ou grau de coerência temporal, é dada por

$$\gamma(T) = \frac{\sum_m \sum_n \sqrt{I(\nu_m)I(\nu_n)} \exp[i2\pi(\nu_m - \nu_n)T]}{\sum_m I(\nu_m)}. \quad (7.3.6)$$

com $\nu_m = \nu_0 + m\Delta\nu_{cav}$, sendo $\Delta\nu_{cav}$ a separação entre modos longitudinais. A soma é para todos os modos da cavidade para os quais $I(\nu_m) > 0$. Consideramos ainda que o modo

central está no centro da curva de ganho, uma boa aproximação quando o número de modos é elevado.

No modelo exposto, há dois parâmetros de ajuste: R (razão entre $\alpha(\nu_0)$ e as perdas); $\Delta\nu_{Dop}$ (largura Doppler da transição). Para a banda espectral livre assumimos o valor dada pelo fabricante (Spectra Physics) $\Delta\nu_{ca} = 174\text{ MHz}$. A figura 7.10 mostra três ajustes do módulo quadrado da função (7.3.6), às curva experimentais, para três correntes de alimentação do laser, dadas por

$$|\gamma(T_{RL})|^2 = \frac{\beta(T_{RL})/\beta_0 - (f_R^2 + f_L^2)}{2f_R f_L}. \quad (7.3.7)$$

Uma vez ajustada a função de coerência, o tempo de coerência a fonte foi calculado pela definição *largura equivalente em potência*⁵ (Saleh and Teich)

$$\tau_c \equiv \int |\gamma|^2 dt. \quad (7.3.8)$$

Para uma corrente de 43A, a largura Doppler encontrada foi de $\Delta\nu_{Dop} = 5.79 \pm 0.05\text{ GHz}$ (próximo do valor indicado pelo fabricante do laser 6 GHz) e a razão entre o ganho central não saturado $R = 4.65 \pm 0.43$. O tempo de coerência calculado por (7.3.8) foi $\tau_c = 174 \pm 0.7\text{ ps}$. Como mostra a fig. 7.9, uma maior corrente da fonte corresponde a um menor tempo de coerência (o ganho aumenta com a corrente, tornando maior a banda das frequência onde o ganho supera as perdas).

Notamos que a transformada de Fourier da autocorrelação do campo (aplicação do teorema de Wiener-Khintchine) não permitiria discernir os modos longitudinais do feixe, pois tal implicaria atrasos ópticos entre os dois feixes vária vezes o comprimento da cavidade (um inconveniente das técnicas baseadas na interferometria de dois feixes).

⁵ Largura duma fonte com grau de coerência rectangular e com a mesma potência.

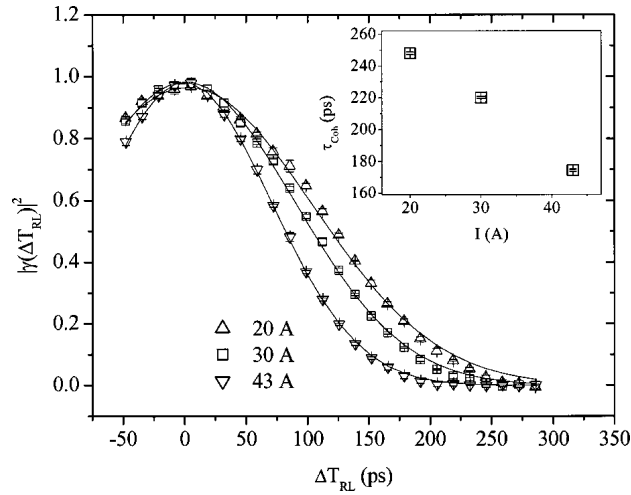


Fig. 7.9 Módulo quadrado da função de autocorrelação do campo normalizada para três correntes de alimentação do laser. As curvas contínuas foram calculadas pelo modelo da equação (7.3.6). O gráfico interior mostra os tempos de coerência associados a cada curva, calculados pela definição (7.3.8).

Limitações da gama dinâmica

A gama dinâmica máxima observada foi $\beta_0 = 0.955$, inferior ao valor ideal unitário. Esta limitação pode ser atribuída a dois factores. O primeiro factor é instrumental e está relacionado com a não linearidade do processo de detecção. De acordo com (Flammer and Ricka 1997), a gama dinâmica está limitada pelo ritmo de foto-contagem (número médio de fótons por tempo de amostragem $K = \langle n_0 \rangle / T_s$) e pelo tempo morto do detector, através da relação

$$\beta_0 = \frac{\langle n_0 n_\tau \rangle}{\langle n_0 \rangle^2} = 1 - 4 K T_{\text{morto}}. \quad (7.3.9)$$

Para $K \sim 200 \text{ KHz}$ e $T_{\text{morto}} = 125 \text{ ns}$, obtém-se $\beta_0 [\text{saturação}] = 0.976$.

Àquela limitação experimental junta-se a coerência espacial limitada do feixe incidente, que tinha um $M^2 \approx 1.3$ na direcção vertical e $M^2 \approx 1.0$ na horizontal, indicando a presença de pelo menos o modo transversal superior TEM_{01} . Para minimizar este efeito usamos a geometria de observação ilustrada na fig. 7.10.

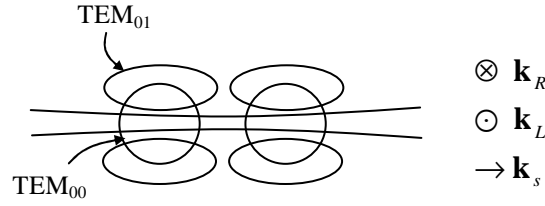


Fig. 7.10 O modo da fibra detectora, muito mais estreito que os feixes difundidos, “observa” a parte central daqueles feixes, dominada pelo modo fundamental.

Apesar disso, uma análise detalhada mostrou que a gama dinâmica máxima ficaria teoricamente limitada a $\beta_0 [\text{modos}] = 0.98$, o que daria um factor de Siegert global de $\beta_0 = \beta_0 [\text{modos}] \beta_0 [\text{saturação}] = 0.956$, muito próximo do valor encontrado.

Comparação com interferometria de Michelson

Validamos o método de medição da coerência temporal comparando as suas medidas com as obtidas usando o método tradicional de interferometria de Michelson. No interferómetro montado, um dos espelhos foi posto em vibração por meio de um actuador piezoeléctrico com uma excursão de alguns comprimentos de onda. O sinal captado por um fotodíodo com área muito inferior à largura das franjas espaciais, converteu as vibrações do espelho em franjas temporais. Para cada atraso óptico entre os braços do interferómetro, o grau de coerência entre os feixes interferidos, foi calculado, como usualmente, pela visibilidade das franjas temporais (máximos e mínimos de intensidade observados num osciloscópio). A figura 7.11 mostra os resultados obtidos comparando-o com os obtidos pelo método baseado em difusão dinâmica de dois feixes.

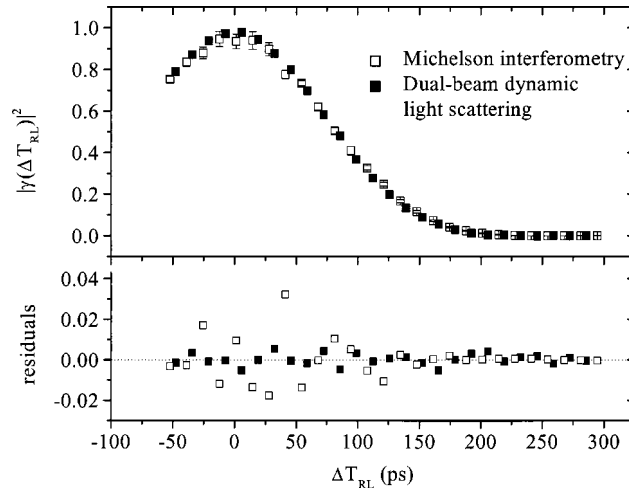


Fig. 7.11 Comparação das medidas de autocorrelação do campo obtidas com o método DLS (difusão dinâmica de luz) de dois feixes e com um interferômetro de Michelson. O gráfico inferior mostra os resíduos para ambos os métodos em relação ao ajuste do modelo de coerência descrito no texto: os resíduos obtidos com DLS são significativamente menores.

O parâmetro largura Doppler do modelo de coerência (7.3.6) ajustado à curva de coerência medida foi $\Delta\nu_{Dop} = 5.72 \pm 0.16 \text{ GHz}$ que concorda com o valor obtido pelo método DLS: $\Delta\nu_{Dop} = 5.79 \pm 0.05 \text{ GHz}$ se tivermos em conta os respectivos intervalos de incerteza. É notório que as medidas pelo método DLS são mais precisas que as obtidas interferometricamente. Observamos ainda uma relativa dificuldade do método interferométrico em medir contrastes próximos da unidade (tempo de atraso entre os feixes nulo), provavelmente devido à área finita do detector (no método DLS esta dificuldade não existe pois usamos detecção coerente).

7.3.3 Medição do grau de coerência espacial global

De acordo com os resultados obtidos na sec. 7.2.3, a difusão de luz também pode dar informação acerca da coerência espacial da radiação incidente, e concretamente medir o grau de coerência global.

Focamos o feixe do laser de Ar+ a analisar de maneira que a sua secção transversal ficasse completamente incluída no volume de difusão, como ilustrado na fig. 7.12.

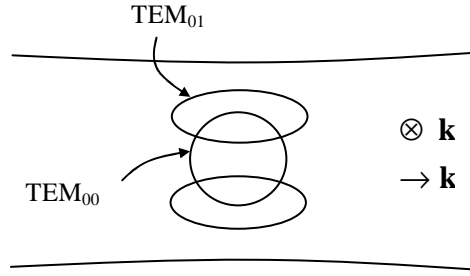


Fig. 7.12 O modo da fibra detectora, muito mais largo que o feixe difundido, permite medir a sua coerência global.

Nestas condições, a que anteriormente chamamos observação transversalmente uniforme, esperávamos que a amplitude dinâmica fosse uma medida exacta do grau de coerência global.

Como já foi referido o feixe analisado tinha um factor $M^2 \approx 1.3$ na direcção vertical. Supondo que tal se devia à presença do modo Hermite-Gauss de ordem (0,1), com potência relativa λ_{01} , além do modo fundamental com potência λ_{00} ,

$$M^2 = \sum_{n=0}^1 \lambda_{nn} (2n+1), \quad (7.3.10)$$

concluindo-se que $\lambda_{00} = 85\%$; $\lambda_{01} = 15\%$. Nessa hipótese, o valor esperado para a coerência global é, de acordo com (7.2.49)

$$K^2 = \lambda_{00}^2 + \lambda_{01}^2 = 0.745. \quad (7.3.11)$$

A figura 7.13 mostra a autocorrelação de intensidade para o feixe de Ar^+ analisado assim como para um feixe He-Ne (suposto TEM_{00}).

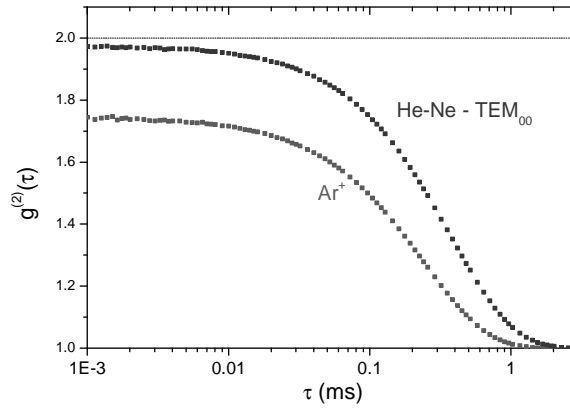


Fig. 7.13. Função de autocorrelação de intensidade obtida com os lasers Ar^+ e He-Ne. O volume difusor engloba completamente a secção transversal do feixe de iluminação.

O valor obtido para a amplitude dinâmica é $\beta \approx 0.74$ para o laser de Ar^+ , em excelente acordo com o valor esperado 0.745. Para o laser de He-Ne obteve-se $\beta \approx 0.97$, comprovando que apenas o modo TEM_{00} espacial oscila fortemente na cavidade.

7.4 Conclusão

A coerência dum campo estatisticamente estacionário difundido num volume difusor dinâmico determina o contraste das flutuações temporais de *speckle* e, reciprocamente, a análise de tais flutuações é um método para análise de coerência do campo. Mostramos que para N feixes incidentes no meio difusor, na condição dos feixes difundidos na direcção de observação serem ortogonais em volume, a amplitude dinâmica da autocorrelação de intensidade difundida é uma forma quadrática das intensidades difundidas por cada feixe individualmente, cujos coeficientes são os módulos da coerência mútua normalizada entre os feixes.

Para testar a teoria, usamos uma técnica comum em análise de meios dispersos: espectroscopia de correlação de fótons com detecção coerente. Como meio difusor usamos

uma solução aquosa monodispersa de partículas de látex. O campo difundido foi acoplado a uma fibra monomodo que definia a direcção de difusão e permitia uma detecção coerente. O sinal transmitido pela fibra foi detectado com um fotomultiplicador e autocorrelacionado.

O requisito principal da aplicação do método é que o tempo de atraso do correlador seja muito maior que o tempo de coerência do campo incidente e ao mesmo tempo muito menor que o tempo de difusão do meio, uma condição facilmente satisfeita experimentalmente. No nosso caso, as escalas de tempo de correlação eram de: ns para o correlador; ps para a fonte laser; ms para o meio difusor.

Aplicamos o método na análise de coerência temporal dum laser de Árgon (essencialmente TEM_{00}), dividido em dois feixes ($N = 2$) com atraso variável, incidentes no meio difusor em direcções opostas. A amplitude dinâmica da autocorrelação de intensidade é uma função do módulo do grau de coerência temporal (autocorrelação do campo). O ajuste da função de coerência a um modelo para um laser com múltiplos modos longitudinais e um meio activo com alargamento Doppler, permitiu-nos estimar tanto o ganho limiar como a largura espectral do alargamento, para várias correntes de bombagem. As medições da função de coerência temporal normalizada obtidas por medidas de visibilidade das franjas num interferómetro de Michelson correspondem às efectuadas com a técnica de difusão dinâmica, com resíduos inferiores a 0.02.

Para um único feixe incidente com N modos ortogonais, a amplitude dinâmica é uma medida directa do factor de coerência espacial global, desde que o modo de captação da fibra monomodo abarque largamente o diâmetro do feixe incidente. Para o laser de Árgon, o grau de coerência transversa global coincide, com precisão de duas casas decimais, com o estimado por medidas de M^2 , supondo a presença no feixe do modo superior TEM_{10} .

O método proposto é inerentemente robusto pois é insensível a vibrações mecânicas e não requer cuidados especiais de alinhamento. Além disso a detecção coerente permite maximizar o contraste da detecção (que doutro modo seria limitado pela área do detector) sem perda de eficiência energética. Finalmente salientamos que a medição directa do grau de coerência transversa global é uma característica interessante do método.

Sugestões para trabalho futuro

- Outros meios difusores poderiam ser testados (ex. disco difusor rotativo) uma vez que apenas o carácter Gaussiano do campo difundido parece ser relevante;
- O correlador poderia ser simplesmente um multiplicador de dois canais (menos dispendioso) pois apenas o limite na origem da autocorrelação interessa.

Apêndice I

Aberrações ópticas

Os elementos ópticos do sistema de análise transversa introduzem inevitavelmente aberrações no feixe analisado. Tais aberrações vão-se traduzir numa distorção dos coeficientes ou dos perfis modais. Também o interferómetro in-situ para caracterização da modulação do LCD é afectado por aberrações. Descrevemos os cuidados para minimizar as fontes parasitas de aberrações e, em particular, a avaliação da qualidade óptica do LCD.

Verificação da colimação do feixe

O estado de colimação do feixe expandido antes de entrar no modulador espacial foi verificado com uma *shear plate* [Melle Griot] que permite também uma avaliação qualitativa da qualidade do feixe expandido.

Lentes

O uso de lentes corrigidas (dobletos) é particularmente importante no expansor de feixe. Praticamente todas as lentes utilizadas foram dobletos pois são corrigidas de aberração esférica e podem operar tanto para o laser de Árgon como para o He-Ne sem alteração significativa das distâncias focais. A orientação correcta das lentes foi respeitada.

Polarizadores

A qualidade de cubos polarizadores e de lâminas retardadoras é geralmente superior à da maioria dos polarizadores lineares de absorção. Por isso preferimos combinações de cubo polarizador - lâminas de meia onda em vez de polarizadores lineares. Foi necessário ainda respeitar a tolerância no ângulo máximo de incidência destes elementos.

Divisores de feixe

Notamos que os divisores semi-espelhados produzem efeitos astigmáticos quando colocados numa secção convergente ou divergente do feixe devido à presença de um pequeno ângulo de cunha. Por isso usamos cubos (não polarizadores) como divisores de feixe.

Filtragem espacial

Além do pin-hole para filtrar espacialmente o feixe expandido sempre que pretendíamos um feixe espacialmente coerente, usamos uma íris para filtragem do feixe difractado pelo modulador para evitar ordens de difracção superiores associadas à grelha do modulador. A filtragem espacial também foi útil para eliminar speckle e franjas parasitas na formação de imagem do LCD.

Alinhamento do feixe

O ajuste do espelho de acoplamento do laser de cavidade aberta (ou do espelho traseiro no laser de Árgon) para modificação da composição modal transversa do feixe acarreta uma alteração do alinhamento – posição e orientação - do feixe. O feixe deve ser realinhado pela pupila de entrada do expensor através de dois espelhos de alinhamento. O realinhamento é monitorizado visualmente através de dois alvos (fig. I.1).

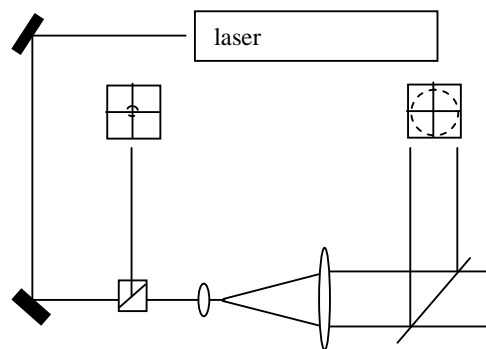


Fig. I.1 Esquema para alinhamento do feixe de entrada no expensor. O ajuste do laser altera a posição e direcção do feixe de saída. Dois espelhos de alinhamento são usados para reorientação e reposicionamento do feixe, verificados por meio de dois alvos de alinhamento.

Atenuação do feixe

A atenuação por polarização (lâmina de meia onda e cubo polarizador) não é fiável próximo da condição de extinção, situação em que os cubos polarizadores têm uma forte dependência angular na transmitância que produz padrões de irradiância artificiais. Nesse caso é melhor usar filtros neutros (embora para o feixes de $\sim 1\text{W}$ isto possa causar efeitos térmicos de auto-focagem).

Limpeza

Este aspecto é trivial, mas requereu a maior atenção dada a sua importância em óptica coerente. Além dos usuais métodos de limpeza óptica, o uso de CO_2 comprimido foi extremamente útil na eliminação de partículas e filamentos.

Aberração de elementos planos

Para caracterizar a qualidade dos elementos planos (*shear plate*, polarizadores, lâminas retardadoras e o próprio LCD) montou-se o interferómetro, ilustrado na fig. I.2, que permite observar a interferência entre as reflexões das duas superfícies do elemento analisado. Difere do clássico interferómetro de Fizeu pois usa uma fonte coerente equivalente a uma fonte pontual com distância finita (feixe não colimado) ou infinita (feixe colimado). Deste modo as franjas estão deslocadas e podem ser observadas num alvo.

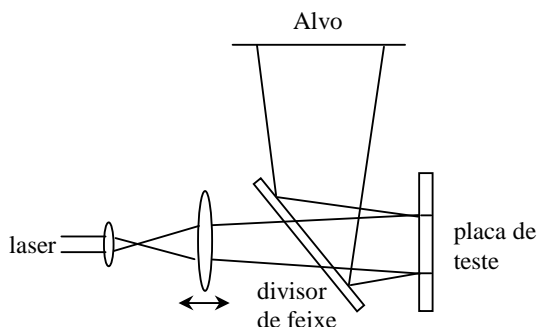


Fig. I.2 Interferómetro para avaliar aberrações em elementos planares (LCD, placa paralela, etc.).

Para um raio com inclinação θ incidente num ponto do elemento com espessura d , a intensidade observada é

$$I = I_0 \left[1 + V \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \right) \right]$$

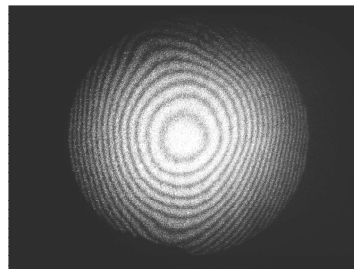
com

$$\Delta \approx 2nd \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta)}{n^2}}$$

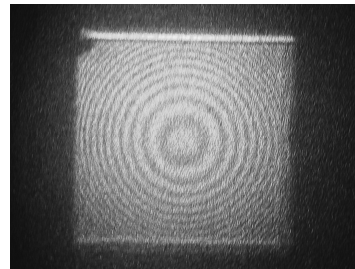
Para um feixe colimado $\theta \approx 0$, obtêm-se franjas de igual espessura que permitem medir grandes aberrações; para um feixe não colimado obtêm-se franjas circulares cuja distorção indica pequenas aberrações.

O método é pouco preciso mas robusto pois é pouco sensível a aberrações do feixe incidente ou dos elementos ópticos auxiliares. Para verificar o estado de colimação do feixe usou-se um *collimation tester* (Melle Griot).

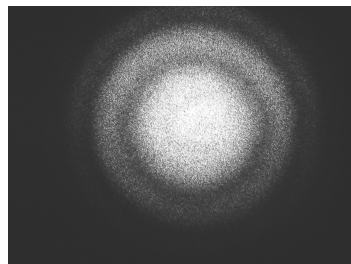
A fig. I.3 ilustra um teste qualitativo de aberração de elementos polarizadores, que justifica a substituição de polarizadores lineares por combinações de cubos polarizadores com lâminas de meia onda para controlo de polarização do SLM



Polarizador linear



Cubo polarizador



Lâmina de meia onda

Fig. I.3 Interferogramas para estimar aberrações de elementos polarizadores.

A placa paralela usada no interferômetro in-situ para caracterizar o LCD, com espessura 5mm e 1' de diâmetro foi avaliada como tendo qualidade $\sim \lambda/10$ e um paralelismo de cerca de 6 arcseg (fig. I.4).

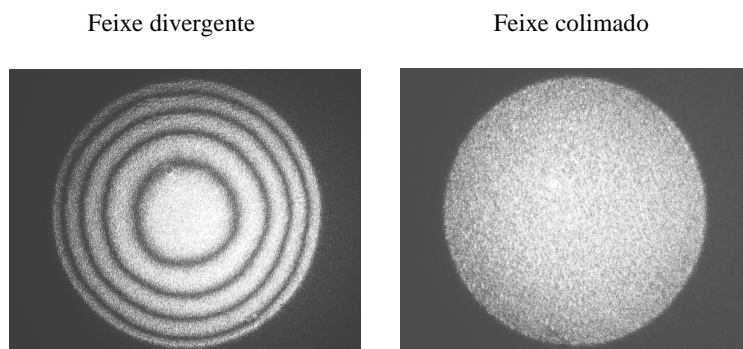


Fig. I.4 Interferogramas para teste de aberrações da lâmina de faces paralelas.

Função de aberração do LCD

O LCD é único elemento óptico que não pode ser substituído, o que requer uma avaliação das aberrações mais quantitativa se quiser ter em conta o efeito destas em aplicações de óptica coerente.

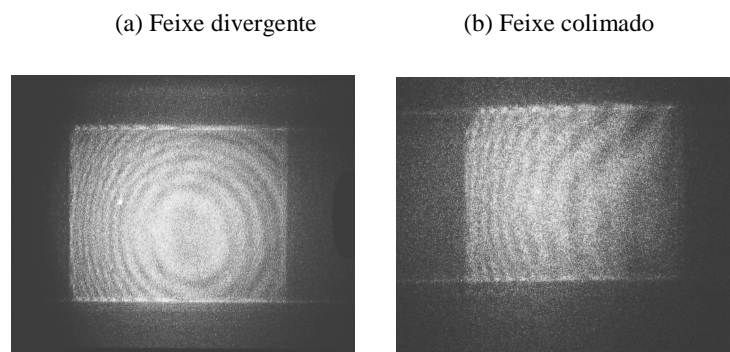


Fig. I.5 Interferogramas para teste de aberrações do LCD

Uma avaliação semi-quantitativa é obtida pela observação dos interferogramas da fig. I.5 que indica uma qualidade da ordem 2λ (para transmissão a 514 nm). Foi possível obter uma estimativa da função de aberração do LCD, a partir do interferograma da fig. I.5(b), marcando pontos ao longo de máximos de franja e assumindo variações de fase monótonas entre franjas sucessivas. O sinal da função de aberração é inferido do deslocamento do centro do padrão do interferograma da fig. I.5(a).

A fig. I.6 mostra uma aproximação parabólica da função de aberração do LCD: Os termos dominantes são lineares em X e Y (*tilt*) - sugerindo a presença de um pequeno ângulo de cunha- e os termos em X^2 e Y^2 que equivalem a uma lente astigmática.

$$\begin{aligned} \text{Aber.}[\lambda] \approx & \text{cte.} + 1.47 \cdot 10^{-2} X + 4.47 \cdot 10^{-3} Y \\ & + 4.01 \cdot 10^{-7} XY - 1.18 \cdot 10^{-5} X^2 - 9.78 \cdot 10^{-6} Y^2 \end{aligned}$$

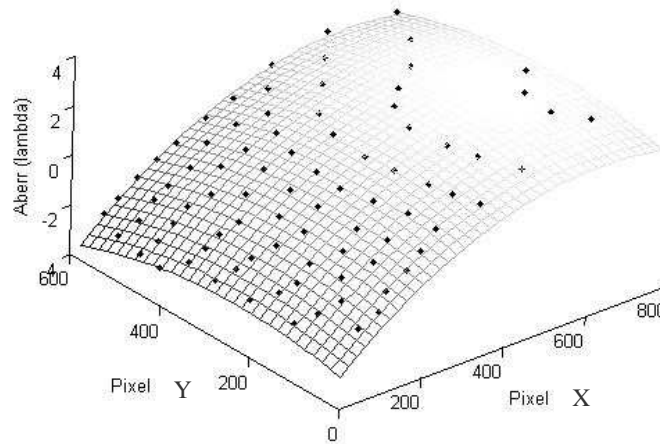


Fig. I.6 Função de aberração do LCD calculada a partir do interferograma correspondente da fig. 16. Os pontos são retirados de máximos de franjas de igual espessura, assumindo uma variação de fase π entre franjas sucessivas. A superfície é um ajuste quadrático aos pontos. O máximo desvio em relação à média é de $\sim 2\lambda$.

Apêndice II

Controle e aquisição de vídeo

O controle de vídeo do modulador LCD e aquisição de vídeo da câmara CCD foi feito usando MATLAB. As imagens da câmara e do modulador foram monitorizadas simultaneamente através de duas placas gráficas instaladas no mesmo computador (fig. II.1). Como o LCD é um monitor ele mesmo, foi necessário dividir o sinal de vídeo respectivo para a sua visualização.

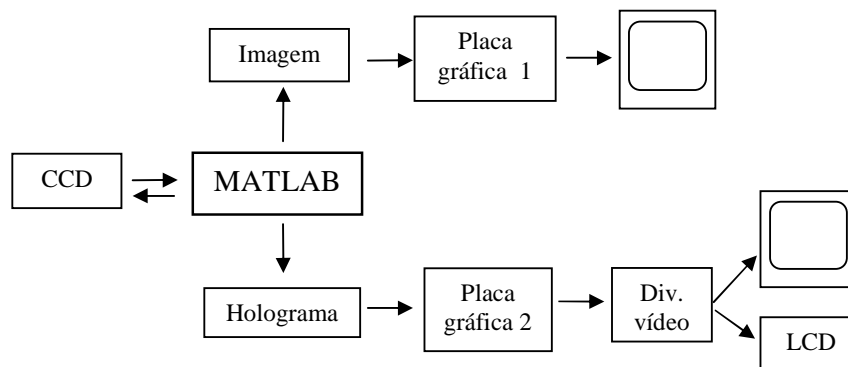


Fig. II.1 Monitorização simultânea do LCD e CCD.

A utilização de uma câmara CCD *firewire* permitiu o seu controle (disparo e tempo de exposição) também através do MATLAB.

Com aquela arquitectura foi possível realizar um sistema de controlo e aquisição de dados automático (fig. II.2)¹.

¹ Não fornecemos os algoritmos por serem demasiado específicos do hardware/software utilizado.

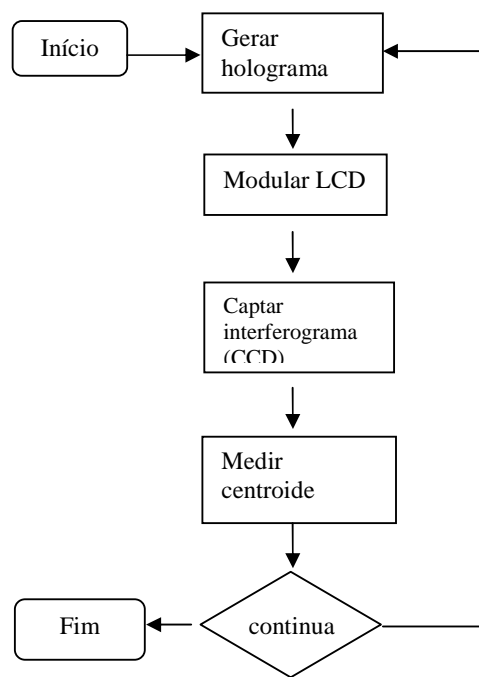


Fig. II.2 Sequência básica de controlo para o analisador holográfico de feixes.

Referências

- Amako, J. U. N., H. Miura, et al. (1993). "Wave-front control using liquid-crystal devices." *Applied Optics* **32**(23): 4323-4329.
- Anderson, B. L. and P. L. Fuhr (1993). "Twin-fiber interferometric method for measuring spatial coherence." *Optical Engineering* **32**: 926.
- Arlt, J., K. Dholakia, et al. (1998). "The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer-generated holograms." *Journal of Modern Optics* **45**(6): 1231-1237.
- Azaña, J., J. E. Lugo, et al. (2005). "New insights into the problem of shadowlike projection of a plane object illuminated by a spherical wavefront." *Optics Communications* **247**(4-6): 257-264.
- Banyal, R. K. and B. R. Prasad (2005). "Pixel size and pitch measurements of liquid crystal spatial light modulator by optical diffraction." *Pramana-Journal of Physics* **65**: 291-296.
- Bartelt, H. O., A. W. Lohmann, et al. (1983). "Mode analysis of optical fibres using computer-generated matched filters." *Electronics Letters* **19**: 247.
- Beijersbergen, M. W., L. Allen, et al. (2003). "Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum." *Optical Angular Momentum*.
- Bélanger, P. A., Y. Champagne, et al. (1994). "Beam propagation factor of diffracted laser beams." *Optics Communications* **105**(3-4): 233-242.
- Bernardo, L. M. and O. D. D. Soares (1988). "Evaluation of the focal distance of a lens by Talbot interferometry." *Appl. Opt* **27**: 296-301.
- Berne, B. J. and R. Pecora (2000). *Dynamic Light Scattering: With Applications to Chemistry, Biology, and Physics*, Courier Dover Publications.
- Born, M. and E. Wolf (1980). *Principles of optics*, Pergamon Press New York.
- Boyd, G. D. and J. P. Gordon (1961). "Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers." *Bell Syst. Tech. J* **40**(2): 489-508.

- Buckley, E., A. Cable, et al. (2006). "Viewing angle enhancement for two-and three-dimensional holographic displays with random superresolution phase masks." *Applied Optics* **45**(28): 7334-7341.
- Carter, W. H. (1980). "Spot size and divergence for Hermite Gaussian beams of any order." *Applied Optics* **19**: 1027-1029.
- Chu, B. (1991). *Laser Light Scattering: Basic Principles and Practice*, Academic Press.
- Cutolo, A., A. Esposito, et al. (1992). "Characterization of the transverse modes in a laser beam: analysis and application to a Q-switched Nd: YAG laser." *Applied Optics* **31**(15): 2722-2733.
- Cutolo, A., T. Isernia, et al. (1995). "Transverse mode analysis of a laser beam by near-and far-field intensity measurements." *Appl. Opt* **34**: 7974–7978.
- De Silvestri, S., V. Magni, et al. (1990). "Lasers with super-Gaussian mirrors." *Quantum Electronics, IEEE Journal of* **26**(9): 1500-1509.
- Degiorgio, V. and J. B. Lastovka (1971). "Intensity-Correlation Spectroscopy." *Physical Review A* **4**(5): 2033-2050.
- Dragoman, D. (2003). "Unambiguous coherence retrieval from intensity measurements." *Journal of the Optical Society of America A* **20**(2): 290-295.
- Elmore, W. C. and M. A. Heald (1985). *Physics of Waves*, Courier Dover Publications.
- Feng, S. and H. G. Winful (2001). "Physical origin of the Gouy phase shift." *Optics Letters* **26**(8): 485-487.
- Flammer, I. and J. Ricka (1997). "Dynamic light scattering with single-mode receivers: partial heterodyning regime." *Appl. Opt* **36**: 7508-7517.
- Fork, R. L., D. R. Herriott, et al. (1964). "A scanning spherical mirror interferometer for spectral analysis of laser radiation." *Appl. Opt* **3**: 1471–1484.
- Fox, A. and T. Li (1966). "Effect of gain saturation on the oscillating modes of optical masers." *Quantum Electronics, IEEE Journal of* **2**(12): 774-783.
- Fox, A. G. and T. Li (1961). "Resonant Modes in a Maser Interferometer." *Advances in Quantum Electronics*.
- Geary, J. M. (1995). *Introduction to Wavefront Sensors*, SPIE Press.

- Goldberg, K. A. and J. Bokor (2001). "Fourier-transform method of phase-shift determination." *Appl. Opt* **40**(17): 2886–2893.
- Goldsborough, J. P. (1964). "Beat frequencies between modes of a concave-mirror optical resonator." *Appl. Opt* **3**: 267-275.
- Golub, M. A., A. M. Prokhorov, et al. (1982). "Synthesis of spatial filters for investigation of the transverse mode composition of coherent radiation." *Quantum Electronics* **12**(9): 1208-1209.
- Golub, M. A., L. Shimshi, et al. (2007). "Mode-matched phase diffractive optical element for detecting laser modes with spiral phases." *Applied Optics* **46**(32): 7823-7828.
- Goodman, J. W. (1996). "Introduction to Fourier Optics." MG Hill.
- Goodman, J. W. (2000). "Statistical Optics."
- Grier, D. G. (2003). "A revolution in optical manipulation." *Nature* **424**(6950): 810-816.
- Hanna, D. (1969). "Astigmatic Gaussian beams produced by axially asymmetric laser cavities." *Quantum Electronics, IEEE Journal of* **5**(10): 483-488.
- Hariharan, P., W. H. Steel, et al. (1974). "Double grating interferometer with variable lateral shear." *Opt. Commun* **11**(317): 299.
- Hartmann, J. (1904). "Objektivuntersuchungen." *Z. Instrumentenk* **24**(1): 1–21.
- Herzig, H. P. (1997). *Micro-Optics: Elements, Systems and Applications*, CRC Press.
- Hodgson, N. and H. Weber (2005). *Laser Resonators and Beam Propagation: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications*, Springer.
- Hsieh, M. L., M. L. Chen, et al. (2007). "Improvement of the complex modulated characteristic of cascaded liquid crystal spatial light modulators by using a novel amplitude compensated technique." *Optical Engineering* **46**: 070501.
- Hu, L., L. Xuan, et al. (2004). "Phase-only liquid crystal spatial light modulator for wavefront correction with high precision." *Optics Express* **12**(26): 6403-6409.
- Iaconis, C. and I. A. Walmsley (1996). "Direct measurement of the two-point field correlation function." *Opt. Lett* **21**(21): 1783.

- Kennedy, S. A., M. J. Szabo, et al. (2002). "Creation of Laguerre-Gaussian laser modes using diffractive optics." *Physical Review A* **66**(4): 43801.
- Kim, H. and Y. H. Lee (2005). "Unique measurement of the parameters of a twisted-nematic liquid-crystal display." *Applied Optics* **44**(9): 1642-1649.
- Kimel, I. and L. R. Elias (1993). "Relations between Hermite and Laguerre Gaussian modes." *Quantum Electronics, IEEE Journal of* **29**(9): 2562-2567.
- Kogelnik, H. and T. Li (1966). "Laser beams and resonators." *Appl. Opt* **5**(10): 1550-1567.
- Kogelnik, H. and W. W. Rigrod (1962). "Visual display of isolated optical-resonator modes." *Proc. IRE* **50**: 220.
- Leach, J., G. M. Gibson, et al. (2006). "Generation of achromatic Bessel beams using a compensated spatial light modulator." *Optics Express* **14**(12): 5581-5587.
- Leger, J. R., D. Chen, et al. (1995). "Design and performance of diffractive optics for custom laser resonators." *Appl. Opt* **34**(14): 2498–2509.
- Leith, E. N. and J. Upatnieks (1963). "Wavefront reconstruction with continuous-tone objects." *J. Opt. Soc. Am* **53**(12): 1377.
- Liesenhoff, A. and F. Rühl (1995). "An interferometric method of laser beam analysis." *Review of Scientific Instruments* **66**: 4059.
- Liu, H. K., J. A. Davis, et al. (1985). "Optical-data-processing properties of a liquid-crystal television spatial light modulator." *Optics Letters* **10**(12): 635-637.
- Lugiato, L. A., C. Oldano, et al. (1988). "Cooperative frequency locking and stationary spatial structures in lasers." *Optical Society of America, Journal, B: Optical Physics* **5**: 879-888.
- Mandel, L. and E. Wolf (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press.
- Márquez, A., C. Iemmi, et al. (2001). "Quantitative prediction of the modulation behavior of twisted nematic liquid crystal displays based on a simple physical model." *Optical Engineering* **40**: 2558.
- Márquez, A., J. Campos, et al. (2000). "Characterization of edge effects in twisted nematic liquid crystal displays." *Optical Engineering* **39**: 3301.

- Mathews, J. H. (1986). Numerical methods for computer science, engineering, and mathematics, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA.
- Milonni, P. W. and J. H. Eberly (1988). Lasers, Wiley New York.
- Murty, M. (1964). "The use of a single plane parallel plate as a lateral shearing interferometer with a visible gas laser source." Appl. Opt **3**(4): 531–534.
- Neil, M. A. A., M. J. Booth, et al. (1998). "Dynamic wave-front generation for the characterization and testing of optical systems." Optics Letters **23**(23): 1849-1851.
- Neto, L. G., D. Roberge, et al. (1995). "Programmable optical phase-mostly holograms with coupled-mode modulation liquid-crystal television." Appl. Opt **34**(1944): 1950.
- Paschotta, R. (2006). "Beam quality deterioration of lasers caused by intracavity beam distortions." Optics Express **14**(13): 6069-6074.
- Patorski, K. (1989). "The self-imaging phenomenon and its applications." Progress in optics **27**: 1-108.
- Pereira, A., F. Ferreira, et al. (2005). "Using light scattering to measure the temporal coherence of optical sources." Journal of the Optical Society of America A **22**(1): 93-102.
- Perevezentsev, E., A. Poteomkin, et al. (2007). "Comparison of phase-aberrated laser beam quality criteria." Applied Optics **46**(5): 774-784.
- Pezzaniti, J. L. and R. A. Chipman (1993). "Phase-only modulation of a twisted nematic liquid-crystal TV by use of the eigenpolarization states." Opt. Lett **18**(18): 1567–1569.
- Remenyi, J., P. Koppa, et al. (2004). "Phase modulation configuration of a liquid crystal display." Proceedings of SPIE **4829**: 815.
- Reményi, J., P. Várhegyi, et al. (2003). "Amplitude, phase, and hybrid ternary modulation modes of a twisted-nematic liquid-crystal display at~ 400 nm." Appl. Opt **42**(17): 3428–3434.
- Ricka, J. (1993). "Dynamic light scattering with single-mode and multimode receivers." Appl. Opt **32**: 2860–2875.

- Saleh, B. E. A. and K. Lu (1990). "Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator." *Optical Engineering* **29**: 240.
- Saleh, B. E. A. and M. C. Teich "Fundamentals of Photonics." A Wiley-Interscience Publication, New York **1**(991): 83.
- Schwarz, U. T., M. A. Bandres, et al. (2004). "Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators." *Optics Letters* **29**(16): 1870-1872.
- Sethna, J. P. (2006). *Statistical mechanics: entropy, order parameters, and complexity*, Oxford; New York: Oxford University Press.
- Shack, R. V. and B. C. Platt (1971). "Production and use of a lenticular Hartmann screen." *J. Opt. Soc. Am* **61**(5): 656.
- Siegman, A. (1974). "Unstable optical resonators." *IEEE Journal of Quantum Electronics* **10**(9): 756-756.
- Siegman, A. E. (1986). *Lasers*, University Science Books.
- Siegman, A. E. (2000). "Laser beams and resonators: Beyond the 1960s." *Selected Topics in Quantum Electronics*, *IEEE Journal of* **6**(6): 1389-1399.
- Smith, P. W. (1972). "Mode selection in lasers." *Proceedings of the IEEE* **60**(4): 422-440.
- Soifer, V. A. and M. V. Golub (1994). *Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms*, CRC Press.
- Soutar, C. and K. Lu (1994). "Determination of the physical properties of an arbitrary twisted-nematic liquid crystal cell." *Optical Engineering* **33**: 2704.
- Soutar, C., S. E. Monroe Jr, et al. (1994). "Measurement of the complex transmittance of the Epson liquid crystal television." *Optical Engineering* **33**: 1061.
- Tamm, C. (1988). "Frequency locking of two transverse optical modes of a laser." *Physical Review A* **38**(11): 5960-5963.
- Tervonen, E., J. Turunen, et al. (1989). "Transverse laser-mode structure determination from spatial coherence measurements: Experimental results." *Applied Physics B: Lasers and Optics* **49**(5): 409-414.
- Thompson, B. J. and E. Wolf (1957). "Two-beam interference with partially coherent light." *J. Opt. Soc. Am* **47**(895): 1.

- Tricoles, G. (1987). "Computer generated holograms- An historical review." *Applied Optics* **26**(20): 4351-4360.
- Turunen, J. and F. Wyrowski (1998). "Diffractive Optics for Industrial and Commercial Applications." *Diffractive Optics for Industrial and Commercial Applications*, by Jari Turunen (Editor), Frank Wyrowski (Editor).
- Turunen, J., E. Tervonen, et al. (1989). "Coherence theoretic algorithm to determine the transverse-mode structure of lasers." *Opt. Lett* **14**(12): 627-629.
- Velghe, S., J. Primot, et al. (2005). "Wave-front reconstruction from multidirectional phase derivatives generated by multilateral shearing interferometers." *Optics Letters* **30**(3): 245-247.
- Warnky, C. M., B. L. Anderson, et al. (2000). "Determining spatial modes of lasers with spatial coherence measurements." *Appl. Opt* **39**: 6109-6117.
- Withington, S. and J. A. Murphy (1998). "Modal analysis of partially coherent submillimeter-wavequasi-optical systems." *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* **46**(11): 1651-1659.
- Wright, D., P. Greve, et al. (1992). "Laser beam width, divergence and beam propagation factor—an international standardization approach." *Optical and Quantum Electronics* **24**(9): 993-1000.
- Yariv, A. (1997). *Optical Electronics in Modern Communications*, Oxford University Press, USA.
- Yariv, A. and P. Yeh (1984). "Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation." *John Wiley & Sons, Inc., New York* **12**: 5448-5456.
- Zhang, Z., G. Lu, et al. (1994). "Simple method for measuring phase modulation in liquid crystal televisions." *Optical Engineering* **33**: 3018.